Le trasformazioni conformi complesse nelle proiezioni cartografiche

Il Problema Fondamentale della Rappresentazione Cartografica

La rappresentazione della superficie terrestre su un piano costituisce uno dei problemi geometrici più antichi e affascinanti della matematica applicata. La difficoltà intrinseca di questo compito risiede in una questione fondamentale della geometria differenziale: la sfera possiede una curvatura gaussiana positiva costante, mentre il piano ha curvatura nulla. Il theorema egregium di Gauss stabilisce che la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco della superficie, ossia può essere calcolata utilizzando solamente misurazioni effettuate sulla superficie stessa, senza riferimento allo spazio ambiente. Questa proprietà implica che non può esistere alcuna mappa che preservi simultaneamente distanze, angoli e aree quando si proietta una sfera su un piano.

La teoria delle funzioni di variabile complessa fornisce il framework matematico più elegante e potente per affrontare questo problema. L'idea centrale consiste nel trattare le coordinate geografiche come componenti di una variabile complessa e nell'utilizzare le funzioni analitiche (o olomorfe) per costruire le trasformazioni cartografiche. Questa impostazione permette di sfruttare l'intero apparato teorico sviluppato nell'analisi complessa del diciannovesimo secolo, includendo i contributi fondamentali di Augustin-Louis Cauchy, Bernhard Riemann, Karl Weierstrass e molti altri matematici.

Il vantaggio principale dell'approccio mediante le funzioni complesse risiede nella profonda connessione tra l'analiticità e la conformità. Una funzione analitica preserva automaticamente gli angoli tra curve che si intersecano, proprietà nota come conformità o isogonalità. Questa caratteristica rende le trasformazioni conformi particolarmente utili per la navigazione, poiché le direzioni angolari vengono preservate localmente, anche se le distanze e le aree vengono necessariamente distorte.

Nel corso di questo trattato, svilupperemo sistematicamente la teoria matematica delle trasformazioni conformi applicate alla cartografia, partendo dai fondamenti dell'analisi complessa e procedendo verso risultati avanzati che coinvolgono la geometria differenziale, la teoria del potenziale, i sistemi dinamici e la topologia algebrica.

Capitolo 1: Le Coordinate Complesse sulla Sfera

1.1 La Sfera di Riemann e la Proiezione Stereografica

Consideriamo la Terra come una sfera perfetta di raggio R. Introduciamo un sistema di coordinate geografiche standard: la latitudine φ, misurata dall'equatore verso i poli (con φ ∈

[-π/2, π/2]), e la longitudine λ, misurata da un meridiano di riferimento (con $\lambda \in [0, 2\pi)$). Un punto P sulla superficie sferica è quindi identificato dalla coppia ordinata (φ, λ).

Per applicare i metodi dell'analisi complessa, dobbiamo associare a ogni punto sulla sfera una coordinata complessa. La costruzione più naturale e geometricamente significativa è la proiezione stereografica. Immaginiamo di collocare la sfera in modo che sia tangente al piano complesso nel punto corrispondente al polo sud, dove $\varphi = -\pi/2$. Il polo nord, situato nel punto dove $\varphi = \pi/2$, diventa il centro di proiezione.

La costruzione procede nel modo seguente: per ogni punto P sulla sfera, diverso dal polo nord, tracciamo una retta che passa per il polo nord e per P. Questa retta interseca il piano complesso tangente in un unico punto P'. La coordinata complessa ζ associata al punto P è definita come la posizione di P' nel piano complesso, con il punto di tangenza identificato con l'origine $\zeta = 0$.

Utilizzando considerazioni di geometria analitica tridimensionale, si può derivare l'espressione esplicita della coordinata complessa ζ in termini delle coordinate geografiche φ e λ. Il risultato è la formula fondamentale:

$$\zeta = \tan(\varphi/2) \cdot \exp(i\lambda)$$

dove i denota l'unità immaginaria, ossia il numero complesso che soddisfa $i^2 = -1$. Questa rappresentazione codifica simultaneamente la latitudine attraverso il modulo $|\zeta| = \tan(\varphi/2)$ e la longitudine attraverso l'argomento $\arg(\zeta) = \lambda$.

Esaminiamo le proprietà di questa parametrizzazione. Quando $\varphi = -\pi/2$ (polo sud), si ha $\tan(\varphi/2) = \tan(-\pi/4) = -1$, ma considerando il limite appropriato otteniamo $\zeta = 0$. Quando $\varphi = 0$ (equatore), risulta $|\zeta| = \tan(0) = 0$, quindi i punti equatoriali si trovano sul cerchio unitario nel piano complesso. Quando $\varphi \to \pi/2$ (avvicinandosi al polo nord), la tangente di $\pi/4$ tende all'infinito, quindi $\zeta \to \infty$.

Per trattare rigorosamente il polo nord, introduciamo il concetto di sfera di Riemann, che è il piano complesso esteso con l'aggiunta di un punto all'infinito, denotato ∞. La sfera di Riemann, indicata con $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, può essere pensata come la compattificazione a un punto del piano complesso. Dal punto di vista topologico, la sfera di Riemann è omeomorfa alla sfera bidimensionale S^2, e questo omeomorfismo è precisamente realizzato dalla proiezione stereografica.

1.2 Proprietà Geometriche della Proiezione Stereografica

La proiezione stereografica possiede numerose proprietà geometriche notevoli che la rendono fondamentale per la teoria delle trasformazioni conformi. La proprietà più importante è la conformità: la proiezione stereografica preserva gli angoli tra curve che si intersecano sulla sfera.

Per dimostrare questa affermazione, consideriamo due curve $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ sulla sfera che si intersecano in un punto P_0 al tempo $t = 0$. L'angolo α tra le due curve in P_0 è definito come l'angolo tra i vettori tangenti $\gamma'_1(0)$ e $\gamma'_2(0)$, calcolato utilizzando il prodotto scalare indotto dalla metrica euclidea dello spazio tridimensionale ambiente.

Sia $\zeta(t) = \tan(\varphi(t)/2) \cdot \exp(i\lambda(t))$ la coordinata complessa stereografica lungo una curva sulla sfera. La derivata $d\zeta/dt$ può essere calcolata utilizzando la regola del prodotto:

$$d\zeta/dt = (1/2) \cdot \sec^2(\varphi/2) \cdot (d\varphi/dt) \cdot \exp(i\lambda) + i \cdot \tan(\varphi/2) \cdot (d\lambda/dt) \cdot \exp(i\lambda)$$

Questa espressione può essere riscritta come:

$$d\zeta/dt = \exp(i\lambda) \cdot [(1/2) \cdot \sec^2(\varphi/2) \cdot (d\varphi/dt) + i \cdot \tan(\varphi/2) \cdot (d\lambda/dt)]$$

L'angolo tra due curve nel piano complesso è determinato dall'argomento del rapporto delle loro derivate complesse. Specificatamente, se $\zeta_1(t)$ e $\zeta_2(t)$ sono le proiezioni stereografiche delle due curve, l'angolo β tra le curve proiettate è dato da:

$$\beta = \arg(d\zeta_2/dt) - \arg(d\zeta_1/dt) = \arg((d\zeta_2/dt)/(d\zeta_1/dt))$$

Attraverso calcoli dettagliati che coinvolgono le espressioni delle derivate e l'applicazione delle formule trigonometriche, si può verificare che $\beta = \alpha$, dimostrando così la conformità della proiezione stereografica.

Un'altra proprietà fondamentale della proiezione stereografica è che essa trasforma i cerchi sulla sfera in cerchi o rette nel piano complesso. Più precisamente:

1. Un cerchio sulla sfera che passa per il polo nord (il centro di proiezione) viene trasformato in una retta nel piano complesso.

2. Un cerchio sulla sfera che non passa per il polo nord viene trasformato in un cerchio nel piano complesso.

Questa proprietà, nota come proprietà circolare, deriva dal fatto che la proiezione stereografica è un'inversione generalizzata. Le inversioni nel piano complesso preservano i cerchi (considerando le rette come cerchi di raggio infinito), e la proiezione stereografica può essere interpretata come una composizione di inversioni.

1.3 La Metrica sulla Sfera in Coordinate Complesse

La sfera di raggio R, considerata come sottovarietà dello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$, eredita una metrica riemanniana dall'immersione standard. In coordinate geografiche (φ, λ), l'elemento di linea sulla sfera, che misura la distanza infinitesimale tra punti vicini, è dato da:

$$ds^2 = R^2 \cdot (d\varphi^2 + \cos^2(\varphi) \cdot d\lambda^2)$$

Questa formula esprime come calcolare la lunghezza di una curva sulla sfera: se $\gamma(t) = (\varphi(t), \lambda(t))$ per $t \in [a, b]$ è una curva parametrizzata, la sua lunghezza è:

$$L(\gamma) = \int_a^b R \cdot \sqrt{((d\varphi/dt)^2 + \cos^2(\varphi) \cdot (d\lambda/dt)^2)}\, dt$$

Il coefficiente $\cos^2(\varphi)$ che appare davanti a $d\lambda^2$ riflette un fatto geometrico importante: i meridiani (le curve a longitudine costante) convergono ai poli. All'equatore, dove $\varphi = 0$, si ha $\cos(0) = 1$, quindi una variazione infinitesimale $d\lambda$ nella longitudine corrisponde a una

distanza $R \cdot d\lambda$. Ai poli, dove $\varphi = \pm\pi/2$, si ha $\cos(\pm\pi/2) = 0$, quindi i meridiani si incontrano e la distanza associata a variazioni di longitudine diventa nulla.

Quando introduciamo la coordinata complessa stereografica ζ, dobbiamo esprimere l'elemento di linea in termini del differenziale $d\zeta$ e del suo complesso coniugato $d\bar{\zeta}$. Questo richiede il calcolo delle derivate parziali di φ e λ rispetto alla parte reale e immaginaria di ζ.

Scriviamo $\zeta = \xi + i\eta$, dove ξ e η sono le coordinate cartesiane reali nel piano complesso. Dalla definizione $\zeta = \tan(\varphi/2) \cdot \exp(i\lambda)$, otteniamo:

$|\zeta| = \tan(\varphi/2)$ $\arg(\zeta) = \lambda$

Da queste relazioni possiamo invertire per ottenere:

$\varphi = 2 \cdot \arctan(|\zeta|)$ $\lambda = \arg(\zeta)$

Calcoliamo ora i differenziali. Per la latitudine:

$d\varphi = 2 \cdot d(\arctan(|\zeta|)) = 2/(1 + |\zeta|^2) \cdot d|\zeta|$

Ora, $|\zeta| = \sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}$, quindi:

$d|\zeta| = (\xi \cdot d\xi + \eta \cdot d\eta)/\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)} = (\xi \cdot d\xi + \eta \cdot d\eta)/|\zeta|$

Per la longitudine, ricordiamo che $\lambda = \arctan(\eta/\xi)$ (con le opportune considerazioni sui quadranti). Quindi:

$d\lambda = d(\arctan(\eta/\xi)) = (\xi \cdot d\eta - \eta \cdot d\xi)/(\xi^2 + \eta^2) = (\xi \cdot d\eta - \eta \cdot d\xi)/|\zeta|^2$

Ora possiamo esprimere questi differenziali in termini di $d\zeta$ e $d\bar{\zeta}$. Ricordiamo che:

$d\zeta = d\xi + i \cdot d\eta$ $d\bar{\zeta} = d\xi - i \cdot d\eta$

Da cui:

$d\xi = (d\zeta + d\bar{\zeta})/2$ $d\eta = (d\zeta - d\bar{\zeta})/(2i)$

Sostituendo queste espressioni nelle formule per $d\varphi$ e $d\lambda$, e dopo algebra considerevole, si giunge alla forma fondamentale dell'elemento di linea in coordinate complesse:

$ds^2 = (4R^2)/((1 + |\zeta|^2)^2) \cdot d\zeta \cdot d\bar{\zeta}$

Questa formula rivela la struttura conforme della metrica: il coefficiente che moltiplica il prodotto $d\zeta \cdot d\bar{\zeta}$ è una funzione reale positiva che dipende soltanto da ζ attraverso il suo modulo $|\zeta|$. Questa è precisamente la forma generale di una metrica conforme nel piano complesso.

Il fattore di scala locale $\lambda(\zeta)$, definito come la radice quadrata del coefficiente metrico, è:

$\lambda(\zeta) = (2R)/(1 + |\zeta|^2)$

Questo fattore ci dice come le distanze sulla sfera si relazionano alle distanze nel piano complesso stereografico. All'origine ($\zeta = 0$, corrispondente al polo sud), il fattore di scala è $\lambda(0) = 2R$. Man mano che $|\zeta|$ aumenta, il fattore di scala diminuisce secondo la formula sopra, tendendo a zero quando $|\zeta| \to \infty$ (polo nord).

1.4 Il Tensore Metrico Complesso e la Geometria Hermitiana

Nel formalismo della geometria differenziale complessa, la metrica su una varietà complessa è descritta da un tensore hermitiano. Per una varietà complessa di dimensione complessa uno (ossia dimensione reale due), come la sfera di Riemann, la metrica hermitiana può essere scritta nella forma:

$$ds^2 = g_{\zeta\zeta} \cdot d\zeta \otimes d\zeta + g_{\zeta\bar{\zeta}} \cdot d\zeta \otimes d\bar{\zeta}$$

La condizione che la metrica sia reale impone $g_{\zeta\zeta} = \bar{g}_{\zeta\bar{\zeta}}$ (il complesso coniugato). Inoltre, per una metrica hermitiana, i coefficienti $g_{\zeta\zeta}$ e $g_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}$ sono identicamente nulli, riflettendo il fatto che la metrica è compatibile con la struttura complessa.

Per la metrica sulla sfera in coordinate stereografiche, abbiamo:

$$g_{\zeta\bar{\zeta}} = (2R)^2/(1 + |\zeta|^2)^2$$

Possiamo scrivere questa espressione in forma esponenziale:

$$g_{\zeta\bar{\zeta}} = \exp(2\sigma(\zeta, \bar{\zeta}))$$

dove σ è la funzione reale:

$$\sigma(\zeta, \bar{\zeta}) = \log(2R) - \log(1 + |\zeta|^2)$$

Questa rappresentazione è particolarmente utile perché permette di esprimere le quantità geometriche, come la curvatura, in termini di derivate della funzione σ.

La curvatura gaussiana K di una metrica conforme nel piano complesso, espressa nella forma $ds^2 = \exp(2\sigma) \cdot d\zeta \cdot d\bar{\zeta}$, è data dalla formula:

$$K = -\exp(-2\sigma) \cdot \Delta\sigma$$

dove Δ è l'operatore di Laplace nel piano complesso:

$$\Delta = 4 \cdot \partial^2/\partial\zeta\partial\bar{\zeta}$$

Calcoliamo esplicitamente la curvatura gaussiana della sfera. Abbiamo:

$$\sigma = \log(2R) - \log(1 + |\zeta|^2)$$

Calcoliamo le derivate. Ricordiamo che $|\zeta|^2 = \zeta \cdot \bar{\zeta}$, quindi:

$$\partial|\zeta|^2/\partial\zeta = \bar{\zeta} \quad \partial|\zeta|^2/\partial\bar{\zeta} = \zeta$$

Quindi:

$\partial\sigma/\partial\zeta = -\bar{\zeta}(1 + |\zeta|^2)$

Calcoliamo la derivata seconda:

$\partial^2\sigma/\partial\zeta\partial\bar{\zeta} = \partial/\partial\zeta(-\bar{\zeta}(1 + |\zeta|^2))$

Applicando la regola del quoziente:

$\partial^2\sigma/\partial\zeta\partial\bar{\zeta} = -(1/(1 + |\zeta|^2)) + (\bar{\zeta} \cdot \zeta)/(1 + |\zeta|^2)^2 = -(1/(1 + |\zeta|^2)) + |\zeta|^2/(1 + |\zeta|^2)^2$

$= -(1 + |\zeta|^2)/(1 + |\zeta|^2)^2 + |\zeta|^2/(1 + |\zeta|^2)^2 = -1/(1 + |\zeta|^2)^2$

Quindi:

$\Delta\sigma = 4 \cdot \partial^2\sigma/\partial\zeta\partial\bar{\zeta} = -4/(1 + |\zeta|^2)^2$

La curvatura gaussiana è:

$K = -\exp(-2\sigma) \cdot \Delta\sigma = -((1 + |\zeta|^2)^2/(4R^2)) \cdot (-4/(1 + |\zeta|^2)^2) = 1/R^2$

Questo risultato conferma che la sfera di raggio R ha curvatura gaussiana costante positiva $K = 1/R^2$, come previsto dalla geometria classica. La derivazione mediante le coordinate complesse illustra la potenza del formalismo hermitiano per calcolare quantità geometriche.

Capitolo 2: Le Funzioni Analitiche e le Trasformazioni Conformi

2.1 Le Equazioni di Cauchy-Riemann e l'Analiticità

Una funzione $w = f(\zeta)$ da un dominio del piano complesso a valori complessi è detta analitica (o olomorfa) in un punto ζ_0 se è differenziabile in senso complesso in un intorno di ζ_0. La differenziabilità complessa è una condizione molto più forte della differenziabilità reale: richiede che il limite:

$f'(\zeta_0) = \lim[h\to0] (f(\zeta_0 + h) - f(\zeta_0))/h$

esista e sia indipendente dalla direzione da cui $h \to 0$ nel piano complesso.

Scriviamo la funzione f in termini delle sue parti reale e immaginaria:

$w = f(\zeta) = u(\xi, \eta) + i \cdot v(\xi, \eta)$

dove $\zeta = \xi + i\eta$ e u, v sono funzioni reali a valori reali. Similarmente, il differenziale h può essere scritto come $h = \Delta\xi + i \cdot \Delta\eta$.

Il limite che definisce la derivata può essere calcolato lungo diverse direzioni. Consideriamo prima il limite quando h è reale, ossia $h = \Delta\xi$:

$f'(\zeta_0) = \lim[\Delta\xi\to0] (u(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0) - u(\xi_0, \eta_0) + i(v(\xi_0 + \Delta\xi, \eta_0) - v(\xi_0, \eta_0)))/\Delta\xi$

$= \partial u/\partial \xi(\xi_0, \eta_0) + i \cdot \partial v/\partial \xi(\xi_0, \eta_0)$

Consideriamo ora il limite quando h è immaginario puro, ossia $h = i \cdot \Delta\eta$:

$f'(\zeta_0) = \lim[\Delta\eta \to 0] (u(\xi_0, \eta_0 + \Delta\eta) - u(\xi_0, \eta_0) + i(v(\xi_0, \eta_0 + \Delta\eta) - v(\xi_0, \eta_0)))/(i \cdot \Delta\eta)$

$= (1/i) \cdot (\partial u/\partial \eta + i \cdot \partial v/\partial \eta) = -i \cdot \partial u/\partial \eta + \partial v/\partial \eta$

Affinché la derivata esista indipendentemente dalla direzione, questi due limiti devono coincidere:

$\partial u/\partial \xi + i \cdot \partial v/\partial \xi = \partial v/\partial \eta - i \cdot \partial u/\partial \eta$

Uguagliando le parti reale e immaginaria, otteniamo le equazioni di Cauchy-Riemann:

$\partial u/\partial \xi = \partial v/\partial \eta \; \partial u/\partial \eta = -\partial v/\partial \xi$

Queste due equazioni differenziali parziali costituiscono la condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f = u + iv$ con derivate parziali continue sia analitica.

Le equazioni di Cauchy-Riemann hanno numerose conseguenze profonde. Prima di tutto, implicano che le funzioni u e v sono armoniche, ossia soddisfano l'equazione di Laplace. Infatti, derivando la prima equazione rispetto a ξ e la seconda rispetto a η:

$\partial^2 u/\partial \xi^2 = \partial^2 v/\partial \xi \partial \eta \; \partial^2 u/\partial \eta^2 = -\partial^2 v/\partial \eta \partial \xi$

Sommando queste due equazioni e utilizzando il teorema di Schwarz sulla commutabilità delle derivate parziali miste (valido sotto ipotesi di continuità):

$\partial^2 u/\partial \xi^2 + \partial^2 u/\partial \eta^2 = \partial^2 v/\partial \xi \partial \eta - \partial^2 v/\partial \eta \partial \xi = 0$

Quindi u soddisfa l'equazione di Laplace:

$\Delta u = \partial^2 u/\partial \xi^2 + \partial^2 u/\partial \eta^2 = 0$

Analogamente, si può dimostrare che anche v è armonica:

$\Delta v = \partial^2 v/\partial \xi^2 + \partial^2 v/\partial \eta^2 = 0$

Due funzioni armoniche u e v che soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann sono dette armoniche coniugate. La relazione tra u e v è simmetrica nel senso che, se v è l'armonica coniugata di u, allora -u è l'armonica coniugata di v.

2.2 La Conformità delle Trasformazioni Analitiche

Una trasformazione $w = f(\zeta)$ è detta conforme in un punto ζ_0 se preserva gli angoli tra curve che si intersecano in ζ_0. Più precisamente, se γ_1 e γ_2 sono due curve nel piano ζ che si intersecano in ζ_0 con un angolo α, e se $f(\gamma_1)$ e $f(\gamma_2)$ sono le loro immagini nel piano w, allora queste curve immagine si intersecano in $f(\zeta_0)$ con lo stesso angolo α.

Dimostriamo che ogni funzione analitica con derivata non nulla è conforme. Sia f analitica in ζ_0 con $f'(\zeta_0) \neq 0$. Consideriamo una curva $\gamma(t)$ che passa per ζ_0 al tempo $t = 0$. La curva immagine è $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$. Il vettore tangente alla curva γ in ζ_0 è $\gamma'(0)$, e il vettore tangente alla curva immagine in $w_0 = f(\zeta_0)$ è:

$\Gamma'(0) = (d/dt)f(\gamma(t))|_{t=0} = f'(\zeta_0) \cdot \gamma'(0)$

Questa relazione mostra che la trasformazione agisce sui vettori tangenti mediante moltiplicazione per il numero complesso $f'(\zeta_0)$.

La moltiplicazione per un numero complesso non nullo nel piano complesso può essere decomposta in due operazioni: una rotazione e un'omotetia (dilatazione uniforme). Se scriviamo $f'(\zeta_0)$ in forma polare:

$f'(\zeta_0) = r \cdot \exp(i\theta)$

dove $r = |f'(\zeta_0)| > 0$ e $\theta = \arg(f'(\zeta_0))$, allora la moltiplicazione per $f'(\zeta_0)$ ruota ogni vettore di un angolo θ e lo dilata di un fattore r.

Consideriamo ora due curve γ_1 e γ_2 che si intersecano in ζ_0 con vettori tangenti $\gamma'_1(0)$ e $\gamma'_2(0)$. L'angolo α tra le curve è:

$\alpha = \arg(\gamma'_2(0)) - \arg(\gamma'_1(0))$

I vettori tangenti alle curve immagine sono:

$\Gamma'_1(0) = f'(\zeta_0) \cdot \gamma'_1(0)$ $\Gamma'_2(0) = f'(\zeta_0) \cdot \gamma'_2(0)$

L'angolo β tra le curve immagine è:

$\beta = \arg(\Gamma'_2(0)) - \arg(\Gamma'_1(0)) = \arg(f'(\zeta_0) \cdot \gamma'_2(0)) - \arg(f'(\zeta_0) \cdot \gamma'_1(0)) = \arg(f'(\zeta_0)) + \arg(\gamma'_2(0)) - \arg(f'(\zeta_0)) - \arg(\gamma'_1(0)) = \arg(\gamma'_2(0)) - \arg(\gamma'_1(0)) = \alpha$

Quindi $\beta = \alpha$, dimostrando che gli angoli sono preservati. Questa dimostrazione rivela anche che tutte le direzioni in ζ_0 vengono ruotate dello stesso angolo $\theta = \arg(f'(\zeta_0))$ e dilatate dello stesso fattore $r = |f'(\zeta_0)|$. Questa uniformità nella dilatazione in tutte le direzioni è caratteristica della conformità.

Viceversa, si può dimostrare che ogni trasformazione conforme con derivate parziali continue è necessariamente analitica (sotto opportune condizioni tecniche). Questo stabilisce un'equivalenza profonda tra l'analiticità, una condizione differenziale, e la conformità, una condizione geometrica.

2.3 Il Teorema di Mappatura di Riemann

Uno dei risultati più profondi e belli dell'analisi complessa è il teorema di mappatura di Riemann, che caratterizza completamente le trasformazioni conformi tra regioni del piano complesso. Il teorema afferma quanto segue:

Teorema (Riemann): Sia Ω un dominio semplicemente connesso nel piano complesso, con $\Omega \neq \mathbb{C}$ (ossia Ω non è l'intero piano complesso). Allora esiste una funzione biolomorfa (ossia analitica con inversa analitica) $f: \Omega \to D$, dove $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ è il disco unitario aperto.

Inoltre, se fissiamo un punto $z_0 \in \Omega$ e richiediamo $f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) > 0$ (reale positivo), allora la funzione f è unica.

Questo teorema ha conseguenze straordinarie. Esso afferma che tutti i domini semplicemente connessi nel piano complesso (eccetto il piano stesso) sono conformemente equivalenti al disco unitario. Dal punto di vista della geometria conforme, c'è essenzialmente un solo tipo di dominio semplicemente connesso proprio.

La dimostrazione originale proposta da Riemann nel 1851 utilizzava argomenti variazionali basati sul principio di Dirichlet, che afferma che il problema di minimizzare l'integrale di Dirichlet ammette sempre una soluzione. Tuttavia, questo principio era stato enunciato senza una dimostrazione rigorosa, e la validità della dimostrazione di Riemann fu messa in dubbio. Karl Weierstrass costruì un controesempio che mostrava che non ogni funzionale ammette un minimo, gettando dubbi sulla dimostrazione di Riemann.

La prima dimostrazione rigorosa del teorema fu fornita da Paul Koebe e Constantin Carathéodory indipendentemente all'inizio del ventesimo secolo. Koebe utilizzò il metodo delle famiglie normali di funzioni analitiche, basato sul teorema di Montel. Presentiamo qui un'idea della dimostrazione moderna.

Idea della dimostrazione: Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ di tutte le funzioni iniettive (univalenti) $f: \Omega \to D$ con $f(z_0) = 0$, normalizzate in modo appropriato. Il teorema di Montel garantisce che questa famiglia è normale, ossia ogni successione in $\mathcal{F}$ contiene una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti a una funzione limite olomorfa.

Si considera la funzione in $\mathcal{F}$ che massimizza $|f'(z_0)|$. L'esistenza di tale funzione segue da argomenti di compattezza: se $\{f\square\}$ è una successione in $\mathcal{F}$ con $|f'\square(z_0)| \to \sup$, allora per normalità possiamo estrarre una sottosuccessione convergente a una funzione limite f, e si può dimostrare che $f \in \mathcal{F}$ e che $f'(z_0)$ realizza effettivamente il supremo.

Si dimostra poi che questa funzione estremale f mappa Ω conformemente sul disco unitario completo. L'argomento utilizza il principio di simmetria di Schwarz: se l'immagine $f(\Omega)$ fosse un sottoinsieme proprio del disco, si potrebbe costruire una funzione in $\mathcal{F}$ con derivata in z_0 strettamente maggiore, contraddicendo l'estremità di f.

Il teorema di mappatura di Riemann ha numerose applicazioni in diverse aree della matematica e della fisica, dall'idrodinamica alla teoria del potenziale, dalla teoria dei numeri alla fisica matematica. Nel contesto cartografico, esso garantisce l'esistenza teorica di proiezioni conformi tra regioni qualsiasi della sfera e regioni prefissate del piano.

2.4 Le Trasformazioni di Möbius

Una classe particolarmente importante di trasformazioni conformi è costituita dalle trasformazioni di Möbius (o trasformazioni lineari frazionarie). Una trasformazione di Möbius è una funzione della forma:

$w = f(\zeta) = (a\zeta + b)/(c\zeta + d)$

dove a, b, c, d sono numeri complessi che soddisfano la condizione ad - bc ≠ 0. Questa condizione assicura che la trasformazione non sia costante e che sia invertibile.

Le trasformazioni di Möbius possono essere estese alla sfera di Riemann definendo:

$f(\infty) = a/c$ se $c \neq 0$ $f(\infty) = \infty$ se $c = 0$ $f(-d/c) = \infty$ se $c \neq 0$

Con queste convenzioni, ogni trasformazione di Möbius è una biiezione dalla sfera di Riemann in sé stessa.

Le trasformazioni di Möbius possono essere composte come segue. Se $f_1(\zeta) = (a_1\zeta + b_1)/(c_1\zeta + d_1)$ e $f_2(\zeta) = (a_2\zeta + b_2)/(c_2\zeta + d_2)$, allora la composizione $f_2(f_1(\zeta))$ è ancora una trasformazione di Möbius con coefficienti determinati dal prodotto di matrici:

$[a_2\ b_2]\ [a_1\ b_1]\ [a_2a_1 + b_2c_1\ a_2b_1 + b_2d_1]\ [c_2\ d_2] \cdot [c_1\ d_1] = [c_2a_1 + d_2c_1\ c_2b_1 + d_2d_1]$

Questa struttura algebrica mostra che le trasformazioni di Möbius formano un gruppo sotto composizione, isomorfo al gruppo proiettivo lineare $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$.

Proprietà fondamentali delle trasformazioni di Möbius:

1. **Preservazione dei cerchi generalizzati:** Le trasformazioni di Möbius mappano cerchi e rette (considerati come cerchi di raggio infinito) in cerchi e rette. Questa proprietà, già incontrata nella proiezione stereografica, è caratteristica delle trasformazioni di Möbius.

2. **Tre punti determinano la trasformazione:** Data una tripla ordinata di punti distinti $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ e una tripla ordinata (w_1, w_2, w_3), esiste un'unica trasformazione di Möbius f tale che $f(\zeta\square) = w\square$ per j = 1, 2, 3.

3. **Birapporto invariante:** Il birapporto (o rapporto anarmonico) di quattro punti distinti $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ è definito come:

$[\zeta_1, \zeta_2; \zeta_3, \zeta_4] = ((\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_2 - \zeta_4))/((\zeta_1 - \zeta_4)(\zeta_2 - \zeta_3))$

Le trasformazioni di Möbius preservano il birapporto: se f è una trasformazione di Möbius, allora:

$[f(\zeta_1), f(\zeta_2); f(\zeta_3), f(\zeta_4)] = [\zeta_1, \zeta_2; \zeta_3, \zeta_4]$

Applicazioni cartografiche delle trasformazioni di Möbius:

Nel contesto della cartografia, le trasformazioni di Möbius permettono di costruire proiezioni azimutali conformi centrate su qualsiasi punto della superficie terrestre. La proiezione stereografica standard ha il polo nord come centro di proiezione e il polo sud come punto di tangenza. Componendo la proiezione stereografica con una trasformazione di Möbius

appropriata, possiamo ottenere una proiezione stereografica centrata su un punto arbitrario (φ_0, λ_0).

La costruzione procede nel modo seguente. Sia P_0 il punto sulla sfera con coordinate geografiche (φ_0, λ_0), e sia ζ_0 la sua coordinata complessa stereografica. Consideriamo la trasformazione di Möbius:

$T(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)/(1 + \bar{\zeta}_0\zeta)$

Questa trasformazione ha le seguenti proprietà:

1. $T(\zeta_0) = 0$ (mappa P_0 nell'origine)
2. $T(\infty) = 1/\bar{\zeta}_0$ (mappa il polo nord)
3. T preserva i cerchi sulla sfera

La composizione $S(\zeta) = T(\zeta)$ fornisce una nuova parametrizzazione della sfera in cui il punto P_0 gioca il ruolo che il polo sud aveva nella proiezione stereografica standard. Questa trasformazione può essere interpretata geometricamente come una rotazione della sfera che porta P_0 nel polo sud, seguita dalla proiezione stereografica standard.

Capitolo 3: La Proiezione di Mercatore e le sue Generalizzazioni

3.1 La Proiezione di Mercatore come Trasformazione Logaritmica

La proiezione di Mercatore, sviluppata dal cartografo fiammingo Gerardus Mercator nel 1569, costituisce uno degli esempi più celebri e utili di proiezione conforme. Dal punto di vista matematico, la proiezione di Mercatore è semplicemente la funzione logaritmo complesso applicata alla coordinata stereografica.

La trasformazione di Mercatore è definita dalla funzione:

$w = f(\zeta) = \log(\zeta)$

dove il logaritmo complesso è definito per $\zeta \neq 0$ mediante:

$\log(\zeta) = \log|\zeta| + i \cdot \arg(\zeta)$

Qui $\log|\zeta|$ denota il logaritmo naturale (reale) del modulo di ζ, e $\arg(\zeta)$ è l'argomento (o fase) di ζ, definito modulo 2π.

Esprimendo questa trasformazione in termini delle coordinate geografiche, ricordiamo che $\zeta = \tan(\varphi/2) \cdot \exp(i\lambda)$, quindi:

$\log(\zeta) = \log(\tan(\varphi/2) \cdot \exp(i\lambda)) = \log(\tan(\varphi/2)) + \log(\exp(i\lambda)) = \log(\tan(\varphi/2)) + i\lambda$

Definiamo le coordinate cartesiane sul piano di Mercatore come:

$x = \mathrm{Re}(w) = \log(\tan(\varphi/2))$ $y = \mathrm{Im}(w) = \lambda$

La coordinata x rappresenta la posizione nord-sud sulla mappa, mentre y rappresenta la posizione est-ovest. Notiamo che la longitudine λ appare linearmente come coordinata orizzontale, il che significa che i meridiani (curve a longitudine costante) vengono mappati in rette verticali x = costante sul piano.

Per i paralleli (curve a latitudine costante φ), la coordinata x è costante mentre y varia, quindi vengono mappati in rette orizzontali. La griglia di meridiani e paralleli sulla sfera diventa quindi una griglia rettangolare ortogonale sul piano di Mercatore, proprietà che riflette la conformità della trasformazione.

Analisi del fattore di scala:

Per calcolare il fattore di scala della proiezione di Mercatore, dobbiamo determinare come le distanze infinitesimali sulla sfera si trasformano. Dalla relazione $w = \log(\zeta)$, otteniamo:

$dw = d\zeta/\zeta$

L'elemento di linea sulla sfera in coordinate stereografiche è:

$ds^2 = (4R^2)/((1 + |\zeta|^2)^2)\cdot d\zeta\cdot d\bar{\zeta}$

Sostituendo $d\zeta = \zeta\cdot dw$:

$ds^2 = (4R^2)/((1 + |\zeta|^2)^2)\cdot|\zeta|^2\cdot dw\cdot d\bar{w}$

Il fattore di scala $\lambda(\varphi)$ è la radice quadrata del coefficiente:

$\lambda(\varphi)^2 = (4R^2\cdot|\zeta|^2)/((1 + |\zeta|^2)^2)$

Ricordando che $|\zeta| = \tan(\varphi/2)$, e utilizzando l'identità trigonometrica:

$1 + \tan^2(\varphi/2) = \sec^2(\varphi/2) = 1/\cos^2(\varphi/2)$

possiamo scrivere:

$1 + |\zeta|^2 = 1 + \tan^2(\varphi/2) = \sec^2(\varphi/2)$

Inoltre, utilizzando le formule di bisezione:

$\cos(\varphi) = \cos^2(\varphi/2) - \sin^2(\varphi/2) = (1 - \tan^2(\varphi/2))/(1 + \tan^2(\varphi/2))$

Da cui:

$\tan^2(\varphi/2) = (1 - \cos(\varphi))/(1 + \cos(\varphi))$

Dopo algebra dettagliata, si ottiene:

$\lambda(\varphi) = (2R\cdot\tan(\varphi/2))/\sec^2(\varphi/2) = (2R\cdot\tan(\varphi/2)\cdot\cos^2(\varphi/2))$

Utilizzando $\tan(\varphi/2) = \sin(\varphi/2)/\cos(\varphi/2)$:

$\lambda(\varphi) = (2R \cdot \sin(\varphi/2) \cdot \cos(\varphi/2)) = R \cdot \sin(\varphi)$

Ma possiamo anche esprimere questo in modo più semplice. Utilizzando la formula:

$\sec(\varphi) = 1/\cos(\varphi)$

e le relazioni trigonometriche appropriate, si dimostra che:

$\lambda(\varphi) = R/\cos(\varphi) = R \cdot \sec(\varphi)$

Questa formula rivela la caratteristica fondamentale della proiezione di Mercatore: il fattore di scala dipende solo dalla latitudine e cresce all'avvicinarsi ai poli secondo la funzione secante.

All'equatore ($\varphi = 0$), abbiamo $\lambda(0) = R \cdot \sec(0) = R$, quindi non c'è distorsione. Alla latitudine $\varphi = 60°$, il fattore di scala è $\lambda(60°) = R \cdot \sec(60°) = 2R$, quindi le distanze sono raddoppiate. Quando $\varphi \to \pm 90°$ (avvicinandosi ai poli), $\sec(\varphi) \to \infty$, quindi il fattore di scala diverge. Questo spiega perché le regioni polari appaiono estremamente ingrandite sulla mappa di Mercatore: la Groenlandia, situata a latitudini elevate, appare con dimensioni comparabili all'Africa, sebbene l'Africa sia circa quattordici volte più grande in termini di area reale.

3.2 Le Lossodromie e la Navigazione Marittima

Una delle proprietà più notevoli della proiezione di Mercatore, e la ragione principale della sua importanza storica per la navigazione, riguarda le lossodromie (o linee di rotta). Una lossodromia è una curva sulla sfera che interseca tutti i meridiani con lo stesso angolo costante.

Dal punto di vista della navigazione marittima, una lossodromia corrisponde a una rotta seguita mantenendo una bussola a un azimut fisso. Se un navigante desidera viaggiare da un punto A a un punto B mantenendo la bussola sempre puntata nella stessa direzione, la traiettoria risultante sarà una lossodromia.

Equazione delle lossodromie:

Sia α l'angolo costante che la lossodromia forma con i meridiani. In coordinate geografiche (φ, λ), possiamo derivare l'equazione differenziale che descrive la lossodromia. L'elemento di linea lungo un meridiano (λ costante) è $ds_\varphi = R \cdot d\varphi$, mentre lungo un parallelo (φ costante) è $ds_\lambda = R \cdot \cos(\varphi) \cdot d\lambda$.

L'angolo α soddisfa:

$\tan(\alpha) = ds_\lambda/ds_\varphi = (R \cdot \cos(\varphi) \cdot d\lambda)/(R \cdot d\varphi) = \cos(\varphi) \cdot (d\lambda/d\varphi)$

Da cui:

$d\lambda/d\varphi = \tan(\alpha)/\cos(\varphi) = \tan(\alpha) \cdot \sec(\varphi)$

Integrando questa equazione differenziale:

$\lambda - \lambda_0 = \tan(\alpha) \cdot \int[\varphi_0 \text{ to } \varphi] \sec(\varphi')d\varphi'$

L'integrale di sec(φ) è un integrale standard:

$\int \sec(\varphi)d\varphi = \log|\sec(\varphi) + \tan(\varphi)| + C = \log|\tan(\varphi/2 + \pi/4)| + C$

Utilizzando identità trigonometriche, questo può anche essere scritto come:

$\int \sec(\varphi)d\varphi = \log|\tan(\varphi/2)| + \text{costante}$

Quindi:

$\lambda - \lambda_0 = \tan(\alpha) \cdot [\log(\tan(\varphi/2)) - \log(\tan(\varphi_0/2))]$

Le lossodromie sulla proiezione di Mercatore:

Nella proiezione di Mercatore, le coordinate sono $x = \log(\tan(\varphi/2))$ e $y = \lambda$. Sostituendo nella formula precedente:

$y - y_0 = \tan(\alpha) \cdot (x - x_0)$

Questa è l'equazione di una retta nel piano (x, y) con pendenza tan(α). Quindi, sulla mappa di Mercatore, ogni lossodromia appare come una linea retta.

Questa proprietà ha un'importanza pratica enorme per la navigazione. Un navigante può tracciare la rotta desiderata sulla mappa di Mercatore semplicemente disegnando una linea retta tra il punto di partenza e la destinazione. La direzione della bussola necessaria per seguire questa rotta è data dall'angolo che la linea forma con i meridiani (le linee verticali sulla mappa).

È importante notare che le lossodromie non sono generalmente le rotte di distanza minima sulla sfera. Le geodetiche sulla sfera (i percorsi di distanza minima) sono archi di cerchi massimi, che sulla proiezione di Mercatore appaiono come curve. Per viaggi su lunghe distanze, la differenza tra la lossodromia e la geodetica può essere significativa.

3.3 La Distorsione Areale nella Proiezione di Mercatore

Mentre la proiezione di Mercatore preserva gli angoli (è conforme), essa necessariamente distorce le aree. Il fattore di distorsione areale è il quadrato del fattore di scala lineare.

Poiché $\lambda(\varphi) = R \cdot \sec(\varphi)$, il fattore di distorsione areale è:

$A(\varphi) = \lambda(\varphi)^2 = R^2 \cdot \sec^2(\varphi)$

All'equatore, $A(0) = R^2$, quindi non c'è distorsione areale. Alla latitudine $\varphi = 45°$, abbiamo:

$A(45°) = R^2 \cdot \sec^2(45°) = R^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 2R^2$

Quindi le aree alla latitudine di 45° appaiono doppie rispetto alle loro dimensioni reali.

Alla latitudine $\varphi = 60°$:

$A(60°) = R^2 \cdot \sec^2(60°) = R^2 \cdot 2^2 = 4R^2$

Le aree appaiono quadruplicate. Questa distorsione estrema alle alte latitudini è la caratteristica più criticata della proiezione di Mercatore quando usata per mappe del mondo, poiché dà un'impressione distorta delle dimensioni relative dei continenti.

Esempio quantitativo:

Consideriamo la Groenlandia, che si estende approssimativamente dalle latitudini 60°N a 83°N, con un'area reale di circa 2.166.000 km². L'Africa si estende approssimativamente dalle latitudini 35°S a 37°N, con un'area reale di circa 30.370.000 km². Il rapporto reale delle aree è:

$A_Africa/A_Groenlandia \approx 30.370.000/2.166.000 \approx 14.0$

Sulla mappa di Mercatore, l'area apparente della Groenlandia è amplificata da un fattore che varia con la latitudine. Alla latitudine media della Groenlandia (circa 72°N), il fattore di distorsione areale è:

$A(72°) = \sec^2(72°) \approx (3.236)^2 \approx 10.5$

L'Africa, che si estende su entrambi i lati dell'equatore, ha una distorsione media molto minore. Questo fa sì che sulla mappa di Mercatore, la Groenlandia appaia con dimensioni comparabili all'Africa, quando in realtà è molto più piccola.

3.4 Le Proiezioni di Mercatore Oblique e Trasverse

La proiezione di Mercatore standard ha l'equatore come linea di distorsione minima (fattore di scala unitario). Per applicazioni che riguardano regioni che si estendono principalmente lungo direzioni diverse dall'equatore, è utile considerare varianti della proiezione di Mercatore.

Proiezione di Mercatore Obliqua:

Nella proiezione di Mercatore obliqua, l'asse di simmetria non coincide con l'asse polare della Terra ma è inclinato rispetto ad esso. Questo si ottiene matematicamente componendo la proiezione di Mercatore standard con una rotazione della sfera.

Geometricamente, possiamo visualizzare la proiezione obliqua come segue: immaginiamo di ruotare la sfera in modo che un cerchio massimo arbitrario (diverso dall'equatore) venga portato nella posizione dell'equatore. Applichiamo quindi la proiezione di Mercatore standard. Infine, ruotiamo la mappa risultante per riportarla nell'orientamento desiderato.

La costruzione algebrica utilizza le trasformazioni di Möbius. Sia C un cerchio massimo sulla sfera passante per due punti P_1 e P_2. Nella coordinata stereografica, questo cerchio corrisponde a un cerchio o a una retta nel piano complesso. Esiste una trasformazione di Möbius M che mappa P_1 e P_2 nei punti $\zeta = 0$ e $\zeta = \infty$, portando così il cerchio C nell'asse reale (che corrisponde all'equatore nella coordinata stereografica standard).

La proiezione di Mercatore obliqua è quindi:

$w = \log(M(\zeta))$

dove M è la trasformazione di Möbius opportuna.

Proiezione di Mercatore Trasversa:

La proiezione di Mercatore trasversa (nota anche come proiezione UTM - Universal Transverse Mercator) è un caso speciale della proiezione obliqua in cui l'asse di simmetria è un meridiano anziché l'equatore.

La proiezione UTM divide la Terra in 60 zone meridiane, ciascuna di ampiezza 6° in longitudine. All'interno di ogni zona, viene applicata una proiezione di Mercatore trasversa con il meridiano centrale della zona come linea di scala vera (fattore di scala 1).

Matematicamente, la proiezione trasversa può essere ottenuta ruotando la sfera di 90° attorno a un asse equatoriale, applicando la proiezione di Mercatore standard, e poi ruotando il risultato. In coordinate complesse, questo corrisponde a una trasformazione della forma:

$w = \log(M(\zeta))$

dove M è una trasformazione di Möbius che effettua la rotazione di 90°.

Le formule esplicite per la proiezione di Mercatore trasversa in termini delle coordinate geografiche (φ, λ) sono più complesse di quelle per la proiezione standard. Una parametrizzazione comune utilizza le coordinate isometriche e le funzioni trigonometriche iperboliche.

La proiezione UTM è ampiamente utilizzata nei sistemi di coordinate per mappe topografiche e per il GPS, poiché fornisce una rappresentazione conforme con distorsioni limitate all'interno di ogni zona meridiana.

Capitolo 4: Le Serie di Potenze e le Proiezioni Polinomiali

4.1 Lo Sviluppo in Serie di Taylor delle Funzioni Analitiche

Una proprietà fondamentale delle funzioni analitiche è che esse ammettono sviluppo in serie di potenze in ogni punto del loro dominio di analiticità. Sia $f(\zeta)$ una funzione analitica in un disco $|\zeta - \zeta_0| < R$. Allora f può essere espressa mediante la serie di Taylor:

$f(\zeta) = \Sigma[n=0 \text{ to } \infty] \, a_n(\zeta - \zeta_0)^n$

dove i coefficienti sono determinati dalle derivate di f in ζ_0:

$a_n = f^{(n)}(\zeta_0)/n!$

Questa serie converge assolutamente e uniformemente su ogni disco compatto contenuto nel disco di convergenza.

Il raggio di convergenza R della serie è determinato dalla distanza dal punto ζ_0 alla singolarità più vicina di f. La formula di Cauchy-Hadamard fornisce un'espressione esplicita:

$1/R = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$

Applicazione alle proiezioni cartografiche:

Nel contesto delle proiezioni cartografiche, possiamo utilizzare serie di potenze per costruire approssimazioni polinomiali di trasformazioni conformi. Consideriamo una trasformazione conforme generica:

$w(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$

I coefficienti a_n possono essere scelti per ottimizzare determinate proprietà della proiezione.

Esempio: Approssimazione polinomiale della proiezione di Mercatore

La proiezione di Mercatore è $w = \log(\zeta)$. Per $|\zeta| < 1$, possiamo utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor del logaritmo complesso centrato in $\zeta = 1$:

$\log(\zeta) = \log(1 + (\zeta - 1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(\zeta - 1)^n/n$

Questa serie converge per $|\zeta - 1| < 1$. Possiamo troncare la serie a un ordine finito N per ottenere un'approssimazione polinomiale:

$w_N(\zeta) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}(\zeta - 1)^n/n$

L'errore di approssimazione può essere stimato mediante il resto della serie di Taylor. Per la serie del logaritmo, il termine di resto può essere espresso utilizzando il teorema di Lagrange:

$R_N(\zeta) = \log(\zeta) - w_N(\zeta) = (-1)^N(\zeta - 1)^{N+1}/((N+1)\xi^{N+1})$

dove ξ è un punto intermedio tra 1 e ζ.

4.2 Le Proiezioni Ottimali mediante Minimizzazione Variazionale

Un approccio sistematico alla costruzione di proiezioni cartografiche consiste nel formulare un problema variazionale: cercare la trasformazione conforme che minimizza una certa misura di distorsione integrata su tutta la sfera.

Consideriamo il funzionale:

$E[w] = \iint_S (\lambda(\zeta) - 1)^2 dA$

dove $\lambda(\zeta) = |w'(\zeta)| \cdot (2R)/(1 + |\zeta|^2)$ è il fattore di scala locale, e l'integrale è esteso su tutta la sfera. Questo funzionale misura la deviazione quadratica media del fattore di scala dall'unità: una proiezione ideale (che non esiste) avrebbe $\lambda = 1$ ovunque, dando $E = 0$.

Per una trasformazione conforme $w(\zeta) = \sum a_n \zeta^n$, possiamo esprimere il funzionale in termini dei coefficienti a_n. La derivata è:

$w'(\zeta) = \Sigma[n=1 \text{ to } \infty] \, n \cdot a_n \cdot \zeta^{(n-1)}$

Il fattore di scala diventa:

$\lambda(\zeta) = |\Sigma \, n \cdot a_n \cdot \zeta^{(n-1)}| \cdot (2R)/(1 + |\zeta|^2)$

Sostituendo nel funzionale e sviluppando il quadrato, otteniamo un'espressione che coinvolge prodotti dei coefficienti a_n e integrali su ζ.

La minimizzazione di $E[w]$ rispetto ai coefficienti a_n conduce a un sistema di equazioni normali. Ponendo $\partial E/\partial a_n = 0$ per ogni n, otteniamo le condizioni necessarie per un minimo.

Questo approccio variazionale fornisce un metodo sistematico per costruire proiezioni che bilanciano ottimamente le distorsioni secondo un criterio quantitativo. In pratica, la risoluzione del problema variazionale può richiedere metodi numerici sofisticati, specialmente quando si considerano vincoli aggiuntivi o funzionali più complessi.

4.3 L'Analisi del Fattore di Scala e le Indicatrici di Tissot

Un modo geometricamente intuitivo per visualizzare le distorsioni di una proiezione cartografica è mediante le indicatrici di Tissot. Queste sono ellissi (o cerchi, nel caso di distorsione uniforme) che mostrano come un cerchio infinitesimale sulla sfera viene trasformato dalla proiezione.

Per una trasformazione conforme, che preserva gli angoli, le indicatrici di Tissot sono cerchi anziché ellissi. Tuttavia, il raggio di questi cerchi varia con la posizione, riflettendo il fattore di scala locale.

Matematicamente, consideriamo un cerchio infinitesimale di raggio ε sulla sfera, centrato in un punto con coordinata stereografica ζ_0. Questo cerchio è costituito dai punti ζ con $|\zeta - \zeta_0| \leq \varepsilon$ (in prima approssimazione, ignorando la curvatura).

Dopo l'applicazione della trasformazione conforme $w = f(\zeta)$, il cerchio viene trasformato in un cerchio di raggio:

$r = |f'(\zeta_0)| \cdot \varepsilon$

Nel piano cartografico. Il rapporto $r/\varepsilon = |f'(\zeta_0)|$ è precisamente il fattore di scala lineare della proiezione.

Per visualizzare le distorsioni su una mappa, si disegnano cerchi di raggio standard (ad esempio, 100 km) centrati in vari punti sulla sfera, e si mostrano le loro immagini sulla proiezione. Le dimensioni relative di questi cerchi sulla mappa rivelano immediatamente le regioni di maggiore e minore distorsione.

Capitolo 5: La Formula di Schwarz-Christoffel e le Proiezioni Poligonali

5.1 Introduzione alla Formula di Schwarz-Christoffel

La formula di Schwarz-Christoffel fornisce una rappresentazione esplicita della trasformazione conforme dal semipiano superiore $\mathbb{H} = \{\zeta \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\zeta) > 0\}$ a un dominio poligonale nel piano complesso. Questa formula ha applicazioni dirette nella costruzione di proiezioni cartografiche quando si desidera mappare regioni della sfera su domini rettangolari o poligonali nel piano.

Enunciato della formula:

Sia P un poligono nel piano complesso con vertici $w_1, w_2, ..., w_n$ e angoli interni $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, ..., \pi\alpha_n$ (dove $0 < \alpha_n < 2$). Allora esiste una trasformazione conforme $f: \mathbb{H} \to P$ che può essere espressa nella forma:

$f(\zeta) = A + B \cdot \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{k=1}^{n} (t - t_k)^{(\alpha_k - 1)}\, dt$

dove:

- $t_1, t_2, ..., t_n$ sono punti distinti sull'asse reale
- A e B sono costanti complesse
- Il punto t_k viene mappato nel vertice w_k del poligono

La formula esprime la trasformazione come un integrale che coinvolge una funzione integranda con singolarità algebriche nei punti t_k. Gli esponenti $\alpha_k - 1$ sono determinati dagli angoli del poligono.

Derivazione della formula:

L'idea alla base della formula di Schwarz-Christoffel è la seguente. Consideriamo la derivata $f'(\zeta)$ della trasformazione conforme. Quando ζ attraversa uno dei punti t_k sull'asse reale, muovendosi lungo l'asse, il punto immagine $f(\zeta)$ attraversa il vertice w_k del poligono.

Nelle vicinanze di un vertice, l'argomento di $f'(\zeta)$ deve cambiare di una quantità specifica. Precisamente, se il poligono ha un angolo interno $\pi\alpha_k$ al vertice w_k, allora l'argomento di $f'(\zeta)$ deve cambiare di $\pi(1 - \alpha_k)$ quando ζ attraversa t_k.

Questo comportamento può essere realizzato se $f'(\zeta)$ ha un fattore $(\zeta - t_k)^{(\alpha_k - 1)}$ per ogni vertice. Infatti:

$\arg((\zeta - t_k)^{(\alpha_k - 1)}) = (\alpha_k - 1) \cdot \arg(\zeta - t_k)$

Quando ζ attraversa t_k da sinistra a destra lungo l'asse reale, $\arg(\zeta - t_k)$ cambia da π a 0, quindi $\arg((\zeta - t_k)^{(\alpha_k - 1)})$ cambia di $(\alpha_k - 1) \cdot (-\pi) = -\pi(\alpha_k - 1) = \pi(1 - \alpha_k)$, che è esattamente il cambiamento richiesto per l'angolo esterno del poligono.

Moltiplicando tutti questi fattori per i vari vertici e includendo una costante moltiplicativa B, otteniamo:

$f'(\zeta) = B \cdot \prod_{k=1}^{n} (\zeta - t_k)^{(\alpha_k - 1)}$

Integrando questa espressione rispetto a ζ e aggiungendo una costante di integrazione A, arriviamo alla formula di Schwarz-Christoffel.

Condizione di chiusura del poligono:

Affinché il poligono sia chiuso, la somma degli angoli esterni deve essere 2π. Gli angoli esterni sono π(1 - α□), quindi:

Σ[k=1 to n] π(1 - α□) = 2π

Da cui:

Σ[k=1 to n] α□ = n - 2

Questa è precisamente la formula classica per la somma degli angoli interni di un poligono con n vertici: la somma degli angoli interni è π(n - 2).

5.2 Applicazione alla Proiezione su un Rettangolo

Un caso particolarmente importante per la cartografia è la proiezione conforme della sfera su un rettangolo. Questo si ottiene componendo la proiezione stereografica dalla sfera al piano con una trasformazione di Schwarz-Christoffel dal piano a un rettangolo.

Consideriamo un rettangolo con vertici in w = 0, w = L, w = L + iH, e w = iH, dove L è la lunghezza e H l'altezza. Gli angoli interni sono tutti retti, quindi α□ = 1/2 per j = 1, 2, 3, 4.

La formula di Schwarz-Christoffel diventa:

f(ζ) = A + B·∫[ζ₀ to ζ] ∏[k=1 to 4] (t - t□)^(-1/2) dt

Scegliamo convenientemente le posizioni dei punti preimmagine. Una scelta standard è:

$t_1 = -1$, $t_2 = -k'$, $t_3 = k'$, $t_4 = 1$

dove 0 < k' < 1 è un parametro da determinare. Con questa scelta simmetrica, la formula si semplifica in:

f(ζ) = A + B·∫[0 to ζ] dt/√((1 - t²)(1 - k'²t²))

Questo integrale è un integrale ellittico incompleto del primo tipo. Introduciamo la sostituzione t = sin(φ), ottenendo:

f(ζ) = A + B·∫[0 to arcsin(ζ)] dφ/√(1 - k'²sin²(φ))

Questo è esattamente l'integrale ellittico incompleto del primo tipo, tradizionalmente denotato F(φ, k) dove k = √(1 - k'²) è il modulo ellittico complementare.

La trasformazione f mappa il semipiano superiore sul rettangolo. I quattro punti t□ sull'asse reale vengono mappati nei quattro vertici del rettangolo. Le dimensioni del rettangolo sono determinate dai valori dell'integrale ellittico completo:

$L = 2B \cdot K(k)$ $H = 2B \cdot K'(k)$

dove $K(k)$ è l'integrale ellittico completo del primo tipo:

$K(k) = \int_{0}^{\pi/2} d\varphi/\sqrt{(1 - k^2\sin^2(\varphi))}$

e $K'(k) = K(k') = K(\sqrt{(1 - k^2)})$ è l'integrale ellittico complementare.

Il rapporto $H/L = K'(k)/K(k)$ può assumere qualsiasi valore positivo variando il modulo k tra 0 e 1, permettendo così di costruire rettangoli con qualsiasi rapporto desiderato tra altezza e larghezza.

5.3 Le Funzioni Ellittiche di Jacobi e le Proiezioni Rettangolari

Per costruire esplicitamente la proiezione conforme su un rettangolo, è necessario invertire l'integrale ellittico. Questa inversione conduce alle funzioni ellittiche di Jacobi, che generalizzano le funzioni trigonometriche al caso ellittico.

La funzione ellittica di Jacobi $sn(u, k)$, dove u è l'argomento e k il modulo, è definita come l'inversa dell'integrale ellittico:

$u = \int_{0}^{\arcsin(sn(u,k))} d\varphi/\sqrt{(1 - k^2\sin^2(\varphi))}$

Equivalentemente, se $u = F(\varphi, k)$, allora $sn(u, k) = \sin(\varphi)$.

Le funzioni ellittiche di Jacobi soddisfano equazioni differenziali analoghe a quelle delle funzioni trigonometriche. Per $sn(u, k)$, l'equazione è:

$(d/du\ sn(u, k))^2 = (1 - sn^2(u, k))(1 - k^2 \cdot sn^2(u, k))$

Esistono altre funzioni ellittiche di Jacobi standard, definite in analogia con le funzioni trigonometriche:

$cn(u, k) = \sqrt{(1 - sn^2(u, k))}$ (analoga al coseno) $dn(u, k) = \sqrt{(1 - k^2 \cdot sn^2(u, k))}$ (funzione delta)

Queste funzioni soddisfano le identità fondamentali:

$sn^2(u, k) + cn^2(u, k) = 1$ $k^2 \cdot sn^2(u, k) + dn^2(u, k) = 1$

che generalizzano l'identità trigonometrica fondamentale $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

Periodicità doppia:

A differenza delle funzioni trigonometriche, che sono periodiche con un periodo reale, le funzioni ellittiche di Jacobi sono doppiamente periodiche nel piano complesso. I due periodi sono:

- Periodo reale: $4K(k)$
- Periodo immaginario: $2iK'(k)$

Questa doppia periodicità significa che le funzioni ellittiche di Jacobi mappano il piano complesso su un reticolo periodico, analogamente a come le funzioni trigonometriche mappano la retta reale su un cerchio.

Applicazione alla proiezione rettangolare conforme:

Utilizzando le funzioni ellittiche di Jacobi, possiamo esprimere esplicitamente la trasformazione conforme dalla coordinata stereografica ζ alle coordinate rettangolari (x, y). La composizione della proiezione stereografica con la trasformazione di Schwarz-Christoffel, espressa mediante funzioni ellittiche, fornisce una proiezione conforme dalla sfera a un rettangolo.

La proiezione di Adams, sviluppata nel ventesimo secolo, utilizza precisamente questo approccio per mappare l'intero globo terrestre su un rettangolo con distorsioni distribuite in modo ottimale. Il modulo ellittico k viene scelto per minimizzare una certa misura di distorsione integrata su tutta la sfera.

Capitolo 6: La Curvatura Gaussiana e i Vincoli Intrinseci delle Proiezioni

6.1 Il Teorema Egregium di Gauss

Il teorema egregium (in latino "teorema notevole") di Carl Friedrich Gauss è uno dei risultati più profondi della geometria differenziale classica. Esso afferma che la curvatura gaussiana di una superficie è un invariante intrinseco, ossia può essere determinata utilizzando solo misurazioni effettuate sulla superficie stessa, senza riferimento allo spazio ambiente in cui la superficie è immersa.

Definizione della curvatura gaussiana:

Per una superficie S immersa nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$, la curvatura gaussiana K in un punto p è definita come il prodotto delle due curvature principali κ_1 e κ_2:

$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$

Le curvature principali sono gli autovalori della mappa di Weingarten (o seconda forma fondamentale), che descrive come la normale alla superficie varia quando ci si muove sulla superficie.

Per una sfera di raggio R, le due curvature principali sono uguali, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1/R$, quindi la curvatura gaussiana è:

$K = (1/R)\cdot(1/R) = 1/R^2$

costante su tutta la sfera.

Per un piano, entrambe le curvature principali sono nulle, $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, quindi $K = 0$.

Il contenuto del teorema egregium:

Il teorema egregium afferma che la curvatura gaussiana può essere espressa in termini della prima forma fondamentale (la metrica) e delle sue derivate, senza riferimento alla seconda forma fondamentale o allo spazio ambiente. Questo significa che la curvatura gaussiana è una proprietà intrinseca della geometria della superficie.

Una conseguenza immediata è che una isometria (una mappa che preserva le distanze) tra due superfici deve necessariamente preservare la curvatura gaussiana. Se $f: S_1 \to S_2$ è un'isometria, allora $K_1(p) = K_2(f(p))$ per ogni punto $p \in S_1$.

Implicazioni per le proiezioni cartografiche:

Il teorema egregium implica che non può esistere un'isometria tra la sfera e il piano, poiché hanno curvature gaussiane diverse ($1/R^2$ per la sfera, 0 per il piano). Questo significa che qualsiasi proiezione della sfera sul piano deve necessariamente introdurre distorsioni nelle distanze, negli angoli, o nelle aree.

Le trasformazioni conformi preservano gli angoli ma non le distanze. Possiamo calcolare come la curvatura gaussiana si trasforma sotto una trasformazione conforme. Se $w = f(\zeta)$ è una trasformazione conforme e se la metrica nel piano ζ è:

$$ds^2 = \exp(2\sigma)\cdot d\zeta\cdot d\bar{\zeta}$$

con curvatura K, allora la metrica nel piano w è:

$$ds^2 = \exp(2\tilde{\sigma})\cdot dw\cdot d\bar{w}$$

dove $\tilde{\sigma} = \sigma - \log|f'(\zeta)|$, e la curvatura diventa:

$$\tilde{K} = K\cdot|f'(\zeta)|^{-2}$$

Questa formula mostra che la curvatura si trasforma inversamente al quadrato del fattore di scala. Per la sfera proiettata sul piano mediante una trasformazione conforme, la curvatura nel piano diventa:

$$\tilde{K} = (1/R^2)\cdot|f'(\zeta)|^{-2}$$

Questa quantità varia con la posizione, riflettendo la distorsione introdotta dalla proiezione. In regioni dove il fattore di scala $|f'(\zeta)|$ è grande, la curvatura trasformata è piccola, e viceversa.

6.2 La Formula di Gauss-Bonnet e i Vincoli Topologici

La formula di Gauss-Bonnet è un risultato fondamentale che collega la geometria locale (curvatura) con la topologia globale (caratteristica di Eulero) di una superficie.

Enunciato della formula di Gauss-Bonnet:

Sia S una superficie compatta orientabile. Allora:

$\iint_S K\, dA = 2\pi \cdot \chi(S)$

dove K è la curvatura gaussiana, dA è l'elemento di area, e $\chi(S)$ è la caratteristica di Eulero di S.

Per una sfera, la caratteristica di Eulero è $\chi(S^2) = 2$. Quindi:

$\iint_{S^2} K\, dA = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$

Verificando questo per una sfera di raggio R con curvatura costante $K = 1/R^2$:

$\iint_{S^2} (1/R^2)\, dA = (1/R^2) \cdot (\text{area della sfera}) = (1/R^2) \cdot 4\pi R^2 = 4\pi$ ✓

Applicazione alle proiezioni:

Consideriamo una proiezione conforme della sfera sul piano. La curvatura gaussiana trasformata è $\tilde{K} = (1/R^2)|f'(\zeta)|^{-2}$. Se integriamo questa curvatura sull'immagine della proiezione:

$\iint \tilde{K}\, dA_{piano} = \iint (1/R^2)|f'(\zeta)|^{-2} \cdot |f'(\zeta)|^2 \cdot dA_{sfera} = (1/R^2) \cdot \iint dA_{sfera} = 4\pi$

dove abbiamo utilizzato il fatto che l'elemento di area si trasforma come $dA_{piano} = |f'(\zeta)|^2 \cdot dA_{sfera}$ per una trasformazione conforme.

Questo risultato mostra che l'integrale della curvatura è preservato dalle trasformazioni conformi, il che è una conseguenza diretta della formula di Gauss-Bonnet e dell'invarianza topologica della caratteristica di Eulero.

6.3 Le Equazioni di Gauss-Codazzi e la Teoria delle Superfici

Le equazioni di Gauss-Codazzi sono un sistema di equazioni differenziali parziali che esprimono le condizioni di compatibilità tra la prima forma fondamentale (metrica) e la seconda forma fondamentale (curvatura estrinseca) di una superficie.

Le forme fondamentali:

Per una superficie parametrizzata S(u,v) nello spazio tridimensionale, la prima forma fondamentale è:

$I = E \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2$

dove: $E = \langle \partial S/\partial u, \partial S/\partial u \rangle$ $F = \langle \partial S/\partial u, \partial S/\partial v \rangle$ $G = \langle \partial S/\partial v, \partial S/\partial v \rangle$

La seconda forma fondamentale è:

$II = L \cdot du^2 + 2M \cdot du \cdot dv + N \cdot dv^2$

dove: $L = \langle \partial^2 S/\partial u^2, n \rangle$ $M = \langle \partial^2 S/\partial u \partial v, n \rangle$ $N = \langle \partial^2 S/\partial v^2, n \rangle$

e n è il vettore normale unitario alla superficie.

L'equazione di Gauss:

L'equazione di Gauss esprime la curvatura gaussiana K in termini dei coefficienti delle due forme fondamentali:

$K = (LN - M^2)/(EG - F^2)$

Ma il teorema egregium afferma che K può anche essere espressa solo in termini di E, F, G e delle loro derivate. L'espressione esplicita è complessa e coinvolge i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita.

Le equazioni di Codazzi:

Le equazioni di Codazzi esprimono condizioni di compatibilità sulle derivate miste della seconda forma fondamentale. Sono necessarie per garantire che la superficie possa essere immersa in modo coerente nello spazio tridimensionale.

Insieme, le equazioni di Gauss-Codazzi costituiscono le condizioni necessarie e sufficienti affinché due forme quadratiche date possano essere realizzate come prima e seconda forma fondamentale di una superficie nello spazio euclideo tridimensionale.

Rilevanza per le proiezioni:

Nel contesto delle proiezioni cartografiche, le equazioni di Gauss-Codazzi forniscono i vincoli matematici rigorosi che limitano quali tipi di distorsioni sono possibili. Una proiezione che tentasse di preservare simultaneamente la metrica (prima forma fondamentale) e la curvatura estrinseca violerebbe le equazioni di Gauss-Codazzi, dimostrando ancora una volta l'impossibilità di una proiezione perfetta.

Capitolo 7: La Teoria del Potenziale e le Proiezioni Armoniche

7.1 Le Funzioni Armoniche e l'Equazione di Laplace

Una funzione $u: \Omega \to \mathbb{R}$ definita su un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{C}$) è detta armonica se soddisfa l'equazione di Laplace:

$\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$

Le funzioni armoniche hanno numerose proprietà notevoli che le rendono centrali in molte aree della matematica e della fisica.

Proprietà delle funzioni armoniche:

1. **Principio del massimo:** Una funzione armonica non costante definita su un dominio limitato non può raggiungere il suo massimo o minimo all'interno del dominio, ma solo sul bordo.

2. **Proprietà della media:** Il valore di una funzione armonica in un punto è uguale alla media dei suoi valori su qualsiasi cerchio centrato in quel punto (contenuto nel dominio di definizione).

3. **Analiticità:** Ogni funzione armonica è infinitamente differenziabile. Inoltre, localmente, ogni funzione armonica è la parte reale di una funzione analitica complessa.

Connessione con le funzioni analitiche:

Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è analitica, allora le equazioni di Cauchy-Riemann:

$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y \quad \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$

implicano che sia u che v sono armoniche. Derivando la prima equazione rispetto a x e la seconda rispetto a y:

$\partial^2 u/\partial x^2 = \partial^2 v/\partial x \partial y \quad \partial^2 u/\partial y^2 = -\partial^2 v/\partial y \partial x$

Sommando e usando l'uguaglianza delle derivate miste:

$\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = \partial^2 v/\partial x \partial y - \partial^2 v/\partial y \partial x = 0$

Quindi u è armonica. Analogamente si dimostra che v è armonica.

Viceversa, data una funzione armonica u, esiste localmente una funzione armonica coniugata v tale che $f = u + iv$ sia analitica. La funzione v è determinata a meno di una costante dalle equazioni di Cauchy-Riemann.

7.2 Il Problema di Dirichlet e le Proiezioni al Bordo Prescritto

Il problema di Dirichlet consiste nel trovare una funzione armonica in un dominio Ω che assuma valori prescritti sul bordo $\partial\Omega$. Matematicamente:

$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \quad u = g \text{ su } \partial\Omega$

dove g è una funzione data sul bordo.

Teorema di esistenza e unicità:

Se Ω è un dominio limitato con bordo sufficientemente regolare (ad esempio, Lipschitziano), e se g è una funzione continua su $\partial\Omega$, allora esiste un'unica funzione armonica u in Ω che è continua su $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ e che soddisfa $u = g$ su $\partial\Omega$.

La dimostrazione dell'esistenza può essere ottenuta mediante diversi metodi:

1. **Metodo variazionale:** Si minimizza il funzionale di energia di Dirichlet:

$E[u] = \int\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dA$

tra tutte le funzioni che assumono i valori prescritti sul bordo.

2. **Metodo del nucleo di Poisson:** Per domini speciali come il disco o il semipiano, si può scrivere una formula integrale esplicita che esprime la soluzione in termini dei dati al bordo.

3. **Metodo delle differenze finite:** Si discretizza il dominio e l'operatore di Laplace, ottenendo un sistema lineare che approssima la soluzione.

Applicazione alle proiezioni cartografiche:

Nel contesto delle proiezioni, il problema di Dirichlet può essere utilizzato per costruire proiezioni che soddisfano vincoli specifici al bordo. Ad esempio, supponiamo di voler proiettare una regione della sfera su un dominio planare Ω con la condizione che i punti sul bordo della regione sferica vengano mappati in posizioni prescritte sul bordo di Ω.

La parte reale u e la parte immaginaria v delle coordinate complesse della proiezione devono entrambe essere armoniche (per garantire che la proiezione sia conforme). Risolvendo due problemi di Dirichlet, uno per u e uno per v, con opportuni dati al bordo, si ottiene una proiezione conforme che soddisfa i vincoli al bordo.

7.3 Il Nucleo di Poisson e la Rappresentazione Integrale

Per il disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, esiste una formula esplicita che esprime la soluzione del problema di Dirichlet in termini di un'integrale sui valori al bordo. Questa è la formula del nucleo di Poisson.

Il nucleo di Poisson per il disco:

Il nucleo di Poisson per il disco unitario è:

$$P(r,\theta,\varphi) = (1 - r^2)/(1 - 2r\cdot\cos(\theta - \varphi) + r^2)$$

dove (r,θ) sono le coordinate polari di un punto $z = r\cdot\exp(i\theta)$ all'interno del disco, e φ parametrizza i punti sul bordo del disco.

Data una funzione continua g definita sul cerchio unitario $|z| = 1$, la soluzione del problema di Dirichlet è:

$$u(r,\theta) = (1/2\pi)\cdot\int_{[0 \text{ to } 2\pi]} g(\varphi)\cdot P(r,\theta,\varphi)\, d\varphi$$

Questa formula può essere interpretata come una media pesata dei valori al bordo, dove i pesi sono dati dal nucleo di Poisson. Punti vicini al bordo contribuiscono maggiormente al valore interno.

Proprietà del nucleo di Poisson:

1. $P(r,\theta,\varphi) > 0$ per ogni $r < 1$
2. $\int_{[0 \text{ to } 2\pi]} P(r,\theta,\varphi)\, d\varphi = 2\pi$ per ogni $r < 1$

3. Per ogni $\delta > 0$, $P(r,\theta,\varphi) \to 0$ uniformemente per $|\theta - \varphi| \geq \delta$ quando $r \to 1$

Queste proprietà implicano che quando $r \to 1$ (ci si avvicina al bordo), la funzione $u(r,\theta)$ converge al valore $g(\theta)$ al bordo.

Derivazione del nucleo di Poisson:

Il nucleo di Poisson può essere derivato utilizzando la teoria delle serie di Fourier. Una funzione armonica u nel disco può essere espressa mediante la serie:

$u(r,\theta) = a_0/2 + \Sigma[n=1 \text{ to } \infty] r^n(a_n \cdot \cos(n\theta) + b_n \cdot \sin(n\theta))$

dove i coefficienti sono determinati dai valori al bordo $g(\theta)$:

$a_n = (1/\pi) \cdot \int[0 \text{ to } 2\pi] g(\varphi) \cdot \cos(n\varphi)\, d\varphi \quad b_n = (1/\pi) \cdot \int[0 \text{ to } 2\pi] g(\varphi) \cdot \sin(n\varphi)\, d\varphi$

Sostituendo queste espressioni nella serie e sommando (utilizzando formule per serie geometriche e trigonometriche), si arriva alla formula integrale con il nucleo di Poisson.

Applicazione cartografica:

Per costruire una proiezione conforme dal disco al disco con una rotazione prescrittaal bordo, possiamo utilizzare il nucleo di Poisson per determinare l'estensione armonica all'interno. Questo fornisce un metodo costruttivo per proiezioni che soddisfano vincoli angolari al bordo.

Capitolo 8: Le Proiezioni Azimutali e le Loro Proprietà

8.1 Definizione e Caratteristiche delle Proiezioni Azimutali

Una proiezione azimutale è una proiezione cartografica in cui le direzioni (azimut) da un punto centrale sono rappresentate correttamente sulla mappa. In altre parole, se P_0 è il punto centrale della proiezione, allora per ogni altro punto P sulla sfera, l'angolo tra il nord e la direzione da P_0 a P è lo stesso sulla sfera e sulla mappa.

Costruzione geometrica:

Geometricamente, le proiezioni azimutali possono essere visualizzate come proiezioni su un piano tangente alla sfera nel punto centrale P_0. A seconda della posizione del centro di proiezione, si ottengono diverse varianti:

1. **Proiezione gnomonica:** Il centro di proiezione è al centro della sfera. I cerchi massimi vengono mappati in linee rette.

2. **Proiezione stereografica:** Il centro di proiezione è al punto antipodale rispetto a P_0. Come abbiamo visto nel Capitolo 1, questa proiezione è conforme e preserva i cerchi.

3. **Proiezione ortografica:** Il centro di proiezione è all'infinito, con raggi paralleli perpendicolari al piano di proiezione. Questa proiezione simula la vista della Terra da una distanza infinita.

8.2 La Proiezione Stereografica come Prototipo Conforme

Riprendiamo la proiezione stereografica analizzata nel Capitolo 1. Essa costituisce il prototipo fondamentale di proiezione azimutale conforme. La sua formula in coordinate complesse è:

$\zeta = \tan(\varphi/2) \cdot \exp(i\lambda)$

dove φ è la latitudine e λ la longitudine.

Proprietà distintive:

1. **Conformità perfetta:** Preserva tutti gli angoli in ogni punto della sfera (eccetto il punto di proiezione).

2. **Cerchi generalizzati:** Trasforma cerchi sulla sfera in cerchi o rette nel piano complesso.

3. **Simmetria rotazionale:** La proiezione è invariante per rotazioni attorno al punto centrale.

4. **Fattore di scala radiale:** Il fattore di scala dipende solo dalla distanza angolare dal centro: $\lambda(\zeta) = (2R)/(1 + |\zeta|^2)$

8.3 La Proiezione Gnomonica e le Geodetiche

La proiezione gnomonica, sebbene non conforme, possiede una proprietà geometrica notevole: mappa i cerchi massimi (geodetiche sulla sfera) in linee rette nel piano.

Formula della proiezione gnomonica:

Per un punto sulla sfera con coordinate geografiche (φ, λ), se il punto centrale della proiezione è al polo nord, le coordinate cartesiane nel piano sono:

$x = R \cdot \tan(\pi/2 - \varphi) \cdot \sin(\lambda) = R \cdot \cot(\varphi) \cdot \sin(\lambda)$ $y = R \cdot \tan(\pi/2 - \varphi) \cdot \cos(\lambda) = R \cdot \cot(\varphi) \cdot \cos(\lambda)$

Alternativamente, in forma vettoriale tridimensionale, se P è un punto sulla sfera con vettore posizione $\mathbf{r} = (x_0, y_0, z_0)$ e il piano di proiezione è tangente al polo nord, la proiezione è ottenuta intersecando la retta dal centro O della sfera passante per P con il piano tangente.

Dimostrazione della proprietà geodetica:

Consideriamo un cerchio massimo sulla sfera. Esso può essere rappresentato come l'intersezione della sfera con un piano passante per il centro O. Nella proiezione gnomonica, i punti di questo cerchio massimo vengono proiettati mediante rette da O che giacciono tutte nel piano che definisce il cerchio massimo.

L'intersezione di questo fascio di rette con il piano di proiezione forma una retta, poiché tutte le rette del fascio giacciono in un piano che interseca il piano di proiezione lungo una retta. Questo dimostra che i cerchi massimi vengono mappati in rette.

Applicazioni nella navigazione aerea:

Questa proprietà rende la proiezione gnomonica estremamente utile per la pianificazione di rotte aeree a lunga distanza. La rotta di distanza minima (geodetica) tra due punti sulla Terra appare come una linea retta sulla mappa gnomonica, facilitando la determinazione della direzione ottimale.

Tuttavia, la proiezione gnomonica ha limitazioni significative:

- Non può rappresentare un emisfero completo (solo meno di un emisfero)
- La distorsione aumenta rapidamente allontanandosi dal punto centrale
- Non è conforme, quindi gli angoli non sono preservati

8.4 La Proiezione Azimutale Equivalente di Lambert

La proiezione azimutale equivalente di Lambert è una proiezione azimutale che preserva le aree anziché gli angoli. È particolarmente utile per mappe tematiche che mostrano distribuzioni statistiche.

Costruzione analitica:

Per un punto centrale al polo nord, la proiezione è definita da:

$\rho = 2R \cdot \sin((\pi/2 - \varphi)/2) = 2R \cdot \sin((\pi - 2\varphi)/(4))$

dove ρ è la distanza radiale dal centro sulla mappa. L'angolo azimutale θ sulla mappa è uguale alla longitudine λ.

In coordinate cartesiane:

$x = \rho \cdot \sin(\lambda) = 2R \cdot \sin((\pi/2 - \varphi)/2) \cdot \sin(\lambda)$ $y = \rho \cdot \cos(\lambda) = 2R \cdot \sin((\pi/2 - \varphi)/2) \cdot \cos(\lambda)$

Questa formula può essere riscritta utilizzando identità trigonometriche:

$\rho = 2R \cdot \sqrt{((1 - \sin(\varphi))/2)}$

Verifica della proprietà di equivalenza:

Per dimostrare che la proiezione preserva le aree, calcoliamo il Jacobiano della trasformazione. L'elemento di area sulla sfera in coordinate geografiche è:

$dA_{sfera} = R^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi \cdot d\lambda$

L'elemento di area nel piano in coordinate polari è:

$dA_{piano} = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$

Dobbiamo calcolare $d\rho/d\varphi$. Derivando $\rho = 2R \cdot \sin((\pi/2 - \varphi)/2)$:

$d\rho/d\varphi = 2R \cdot \cos((\pi/2 - \varphi)/2) \cdot (-1/2) = -R \cdot \cos((\pi/2 - \varphi)/2)$

Quindi:

$|d\rho/d\varphi| = R \cdot \cos((\pi/2 - \varphi)/2)$

Sostituendo nella formula dell'area:

$dA_{piano} = \rho \cdot |d\rho/d\varphi| \cdot d\varphi \cdot d\lambda = 2R \cdot \sin((\pi/2 - \varphi)/2) \cdot R \cdot \cos((\pi/2 - \varphi)/2) \cdot d\varphi \cdot d\lambda$

Utilizzando l'identità $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$:

$dA_{piano} = R^2 \cdot \sin(\pi/2 - \varphi) \cdot d\varphi \cdot d\lambda = R^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi \cdot d\lambda = dA_{sfera}$

Questo dimostra rigorosamente che la proiezione preserva le aree.

Distorsione angolare:

Sebbene la proiezione di Lambert preservi le aree, essa introduce distorsione angolare. Il fattore di distorsione angolare può essere quantificato mediante l'indicatrice di Tissot, che in questo caso diventa un'ellisse anziché un cerchio.

8.5 Confronto Quantitativo delle Proiezioni Azimutali

Consideriamo tre proiezioni azimutali centrate al polo nord e confrontiamo i loro fattori di scala in funzione della colatitudine $\theta = \pi/2 - \varphi$ (distanza angolare dal polo):

Proiezione stereografica: $\rho_{stereo} = 2R \cdot \tan(\theta/2)$ Fattore di scala: $k_{stereo} = \sec^2(\theta/2)$

Proiezione gnomonica: $\rho_{gnom} = R \cdot \tan(\theta)$ Fattore di scala: $k_{gnom} = \sec^2(\theta)$

Proiezione ortografica: $\rho_{ortho} = R \cdot \sin(\theta)$ Fattore di scala: $k_{ortho} = \cos(\theta)$

Proiezione equivalente di Lambert: $\rho_{Lambert} = 2R \cdot \sin(\theta/2)$ Fattore di scala: $k_{Lambert}$ varia con la direzione per preservare l'area

Analisi al variare di θ:

Per $\theta = 0°$ (centro): tutte hanno fattore di scala 1 Per $\theta = 30°$: $k_{stereo} \approx 1.035$, $k_{gnom} \approx 1.155$, $k_{ortho} \approx 0.866$ Per $\theta = 60°$: $k_{stereo} \approx 1.333$, $k_{gnom} \approx 4$, $k_{ortho} \approx 0.5$ Per $\theta = 90°$ (equatore): $k_{stereo} = 2$, $k_{gnom} \to \infty$, $k_{ortho} = 0$

Questo confronto rivela che la proiezione stereografica ha distorsioni moderate e distribuite più uniformemente rispetto alle altre proiezioni azimutali.

Capitolo 9: Le Proiezioni Coniche Conformi

9.1 La Geometria del Cono Tangente

Le proiezioni coniche costituiscono una classe importante di proiezioni cartografiche particolarmente adatte per rappresentare regioni che si estendono principalmente lungo direzioni est-ovest a latitudini intermedie.

Costruzione geometrica:

Una proiezione conica è ottenuta proiettando la superficie sferica su un cono che è tangente o secante alla sfera. Dopo la proiezione, il cono viene "srotolato" per formare una superficie piana.

Consideriamo un cono tangente alla sfera lungo un parallelo di latitudine φ_0, chiamato parallelo standard. L'asse del cono coincide con l'asse polare della sfera.

Parametrizzazione del cono:

Un cono di semiapertura α (l'angolo tra l'asse e la generatrice) può essere parametrizzato in coordinate cilindriche (r, θ, z) dove:

$z = r \cdot \cot(\alpha)$

Quando il cono è tangente alla sfera di raggio R lungo il parallelo φ_0, la relazione geometrica impone:

$r_0 = R \cdot \cos(\varphi_0)$ $z_0 = R \cdot \sin(\varphi_0)$

Da cui:

$\cot(\alpha) = z_0/r_0 = \tan(\varphi_0)$

Quindi $\alpha = \pi/2 - \varphi_0$.

9.2 La Proiezione di Lambert Conica Conforme

La proiezione conica conforme di Lambert è una delle proiezioni più importanti per mappe di regioni di medie latitudini. È utilizzata per molti sistemi di coordinate nazionali e regionali.

Derivazione mediante coordinate complesse:

Per costruire una proiezione conica conforme, utilizziamo l'approccio delle trasformazioni analitiche. Consideriamo la coordinata stereografica sulla sfera:

$\zeta = \tan(\varphi/2) \cdot \exp(i\lambda)$

Cerchiamo una trasformazione della forma:

$w = A \cdot \zeta^n$

dove n è una costante detta costante conica, e A è un coefficiente di scala complesso.

Questa trasformazione è analitica (quindi conforme) purché n sia costante. Scriviamo:

$w = A \cdot [\tan(\varphi/2)]^n \cdot \exp(in\lambda)$

Se poniamo $w = \rho \cdot \exp(i\theta)$ in coordinate polari, otteniamo:

$\rho = |A| \cdot [\tan(\varphi/2)]^n$ $\theta = n \cdot \lambda + \arg(A)$

Possiamo normalizzare scegliendo $\arg(A) = 0$, quindi:

$\rho = C \cdot [\tan(\varphi/2)]^n$ $\theta = n \cdot \lambda$

dove $C = |A|$ è una costante reale positiva.

Determinazione della costante conica:

Per una proiezione conica, i meridiani (curve a λ costante) devono essere mappati in raggi che si irradiano da un punto, e i paralleli (curve a φ costante) devono essere mappati in archi di cerchio concentrici.

Dalla formula $\theta = n \cdot \lambda$, vediamo che:

- Quando λ varia da 0 a 2π, θ varia da 0 a $2\pi n$
- Se $n = 1$, il cono si srotola in un piano completo
- Se $n < 1$, il cono si srotola in un settore di angolo $2\pi n$

La costante conica n è scelta per minimizzare le distorsioni nella regione di interesse. Una scelta comune è:

$n = \sin(\varphi_0)$

dove φ_0 è la latitudine del parallelo standard (o la media delle latitudini di due paralleli standard se il cono è secante).

Formula esplicita della proiezione di Lambert conica:

Con la scelta $n = \sin(\varphi_0)$, e determinando C in modo che il fattore di scala sia unitario lungo il parallelo standard, la proiezione diventa:

$\rho = (R \cdot \cos(\varphi_0))/(\sin(\varphi_0)) \cdot [\tan(\pi/4 + \varphi/2)/\tan(\pi/4 + \varphi_0/2)]^{\wedge}(\sin(\varphi_0))$

$\theta = \sin(\varphi_0) \cdot \lambda$

In forma cartesiana, con origine al polo:

$x = \rho \cdot \sin(\theta)$ $y = \rho_0 - \rho \cdot \cos(\theta)$

dove ρ_0 è il valore di ρ al parallelo di origine (tipicamente $\varphi = 0$ o $\varphi = \varphi_0$).

Fattore di scala:

Il fattore di scala lungo i meridiani è:

$k = \rho/(R \cdot \partial\rho/\partial\varphi)$

Dopo calcoli che coinvolgono le derivate logaritmiche:

$k = [\tan(\pi/4 + \varphi/2)/\tan(\pi/4 + \varphi_0/2)]^{\sin(\varphi_0)}$

Al parallelo standard $\varphi = \varphi_0$, si ha $k = 1$ (nessuna distorsione).

9.3 La Proiezione Conica con Due Paralleli Standard

Una variante importante della proiezione di Lambert conica utilizza un cono secante che interseca la sfera lungo due paralleli di latitudine φ_1 e φ_2. Lungo questi due paralleli, il fattore di scala è esattamente 1, e la distorsione è minimizzata nella regione compresa tra di essi.

Determinazione della costante conica:

Per una proiezione con due paralleli standard, la costante conica è determinata dalla condizione che il fattore di scala sia unitario in entrambi i paralleli. Questo porta all'equazione:

$n = [\log(\cos(\varphi_1)) - \log(\cos(\varphi_2))]/[\log(\tan(\pi/4 + \varphi_2/2)) - \log(\tan(\pi/4 + \varphi_1/2))]$

Questa formula può essere semplificata utilizzando le identità logaritmiche:

$n = \log[\cos(\varphi_1)/\cos(\varphi_2)]/\log[\tan(\pi/4 + \varphi_2/2)/\tan(\pi/4 + \varphi_1/2)]$

Analisi della distorsione:

La distorsione nella proiezione conica con due paralleli standard ha un andamento caratteristico:

- $k = 1$ esattamente su $\varphi = \varphi_1$ e $\varphi = \varphi_2$
- $k < 1$ per $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ (compressione)
- $k > 1$ per $\varphi < \varphi_1$ o $\varphi > \varphi_2$ (espansione)

Il minimo della distorsione si verifica approssimativamente a metà tra i due paralleli standard. Per ottimizzare la proiezione per una regione specifica, φ_1 e φ_2 vengono scelti in modo che la regione di interesse sia centrata tra di essi.

Esempio: per gli Stati Uniti continentali, che si estendono approssimativamente da 25°N a 49°N, vengono spesso utilizzati i paralleli standard $\varphi_1 = 33°N$ e $\varphi_2 = 45°N$, che distribuiscono le distorsioni in modo uniforme.

Capitolo 10: Le Trasformazioni di Schwarz-Christoffel e Applicazioni Avanzate

10.1 Generalizzazione a Poligoni con Vertici all'Infinito

La formula di Schwarz-Christoffel, introdotta nel Capitolo 5, può essere estesa per trattare poligoni con uno o più vertici all'infinito. Questi casi richiedono un'analisi asintotica più sofisticata.

Poligono con un vertice all'infinito:

Consideriamo un poligono con n-1 vertici finiti w_1, w_2, ..., w_{n-1} e un vertice w_n = ∞. L'angolo al vertice all'infinito è definito come l'angolo esterno misurato "dall'altro lato".

La formula di Schwarz-Christoffel diventa:

f(ζ) = A + B · ∫[$ζ_0$ to ζ] ∏[k=1 to n-1] (t - t_k)^(α_k - 1) dt

Notare che il fattore corrispondente al vertice all'infinito è assente dal prodotto. La condizione di chiusura diventa:

Σ[k=1 to n-1] α_k = n - 1

Esempio: semipiano al semipiano (trasformazione identità):

Il caso più semplice è quando il poligono è esso stesso un semipiano. In questo caso, ci sono solo due "vertici" sulla retta reale (che formano il bordo del semipiano), entrambi all'infinito. Gli angoli sono entrambi 0, e la trasformazione risultante è:

f(ζ) = A + B · ζ

una trasformazione lineare.

10.2 La Proiezione su un Esagono Regolare

Un'applicazione interessante della formula di Schwarz-Christoffel è la costruzione di una proiezione conforme della sfera su un esagono regolare. Questo può essere utile per visualizzazioni artistiche o per particolari applicazioni in grafica computazionale.

Parametri dell'esagono:

Un esagono regolare ha sei vertici con angoli interni tutti uguali a 2π/3 (120°). Quindi α_k = 2/3 per k = 1, 2, ..., 6.

Verifichiamo la condizione di chiusura:

Σα_k = 6 · (2/3) = 4 = 6 - 2 ✓

Formula di Schwarz-Christoffel:

Per simmetria, scegliamo i punti preimmagine t_k distribuiti simmetricamente sulla retta reale. Una scelta possibile è collocarli come le radici seste dell'unità proiettate sull'asse reale tramite ζ → Re(ζ).

La formula diventa:

f(ζ) = A + B · ∫[0 to ζ] ∏[k=1 to 6] (t - t_k)^(-1/3) dt

Questo integrale non può essere espresso in termini di funzioni elementari, ma può essere valutato numericamente o espresso mediante funzioni ipergeometriche.

Simmetrie della proiezione:

La proiezione sull'esagono eredita le simmetrie dell'esagono regolare. Specificamente:

- Simmetria rotazionale di ordine 6
- Simmetrie riflessive lungo sei assi

Queste simmetrie possono essere sfruttate per ridurre i calcoli: è sufficiente calcolare la trasformazione in un settore angolare di 60° e poi estenderla per simmetria.

10.3 Il Teorema di Uniformizzazione di Poincaré

Il teorema di uniformizzazione è uno dei risultati più profondi e generali nella teoria delle trasformazioni conformi. Esso classifica completamente tutte le superfici di Riemann semplicemente connesse.

Enunciato del teorema:

Ogni superficie di Riemann semplicemente connessa è conformemente equivalente a una delle seguenti tre geometrie modello:

1. La sfera di Riemann Ĉ (curvatura positiva costante)
2. Il piano complesso $\mathbb{C}$ (curvatura nulla)
3. Il disco unitario $\mathbb{D}$ o equivalentemente il semipiano superiore $\mathbb{H}$ (curvatura negativa costante)

Più precisamente, data una superficie di Riemann semplicemente connessa S, esiste una funzione biolomorfa (trasformazione conforme con inversa conforme) tra S e uno dei tre modelli.

Implicazioni per la cartografia:

La sfera è conformemente equivalente a Ĉ (è il primo caso del teorema). Ogni regione semplicemente connessa sulla sfera (eccetto la sfera intera con meno di tre punti rimossi) è conformemente equivalente al disco unitario.

Questo significa che, in linea di principio, possiamo sempre costruire una proiezione conforme da una regione della sfera a un disco. Tuttavia, il teorema è un risultato di

esistenza: garantisce l'esistenza della trasformazione ma non fornisce necessariamente una formula esplicita.

Idea della dimostrazione:

La dimostrazione del teorema di uniformizzazione è tecnicamente complessa e utilizza strumenti avanzati di analisi complessa, geometria differenziale e teoria del potenziale. Un approccio moderno utilizza il seguente schema:

1. Si considera il rivestimento universale della superficie S
2. Si dimostra che il rivestimento universale è conformemente equivalente a uno dei tre modelli
3. Si studia il gruppo di trasformazioni che identifica il rivestimento con S

La classificazione dipende dalla caratteristica di Eulero e dal genere della superficie.

Per superfici semplicemente connesse (genere 0, caratteristica di Eulero 2 se compatte), il rivestimento universale coincide con la superficie stessa, e la classificazione dipende da considerazioni di curvatura e compattezza.

Capitolo 11: Applicazioni Moderne e Computational

11.1 Il Calcolo Numerico delle Trasformazioni Conformi

Mentre molte trasformazioni conformi classiche hanno espressioni analitiche chiuse, per applicazioni pratiche è spesso necessario calcolare trasformazioni conformi numericamente.

Il metodo di Zipper:

Un algoritmo moderno ed efficiente per calcolare trasformazioni conformi è il metodo di Zipper, sviluppato da Marshall e Rohde. Questo metodo costruisce iterativamente la trasformazione di Schwarz-Christoffel "inghiottendo" un vertice alla volta del poligono.

L'idea è la seguente: supponiamo di conoscere la trasformazione conforme g_n dal disco unitario a un poligono P_n con n vertici. Per ottenere la trasformazione g_{n+1} a un poligono con n+1 vertici, componiamo g_n con una trasformazione di Möbius opportuna che "aggiunge" il nuovo vertice.

Algoritmo iterativo:

1. Inizializzazione: $g_0(\zeta) = \zeta$ (trasformazione identità)
2. Per k = 1 a n:
    - Calcola i parametri della trasformazione di Möbius M_k che "incorpora" il k-esimo vertice
    - Aggiorna: g_k(ζ) = M_k(g_{k-1}(ζ))
3. Output: g_n è la trasformazione cercata

Complessità computazionale:

Il metodo di Zipper ha complessità $O(n^2)$ per un poligono con n vertici, rendendolo praticabile anche per poligoni complessi con centinaia di vertici.

11.2 Le Proiezioni Interattive e la Visualizzazione Dinamica

Con l'avvento della cartografia digitale e dei sistemi GIS (Geographic Information Systems), le proiezioni cartografiche possono essere modificate interattivamente in tempo reale.

Proiezioni adattive:

Una proiezione adattiva modifica dinamicamente i suoi parametri in base alla regione visualizzata e al livello di zoom. Questo permette di minimizzare le distorsioni nella regione di interesse corrente.

Esempio: una proiezione azimutale conforme può ricalcolare il suo punto centrale in base alla posizione corrente dell'utente o al centro della vista sulla mappa. Quando l'utente si sposta o fa zoom, la proiezione viene ricalcolata per centrare e ottimizzare la visualizzazione.

Implementazione via trasformazioni di Möbius:

Per una proiezione stereografica, cambiare il punto centrale equivale a comporre la proiezione con una trasformazione di Möbius. Se la coordinata stereografica originale è ζ e vogliamo centrare la proiezione su un punto con coordinata ζ_0, applichiamo:

$$T(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)/(1 + \bar{\zeta}_0 \cdot \zeta)$$

Questa trasformazione può essere calcolata efficacemente in tempo reale per ogni punto visibile sulla mappa.

11.3 Le Proiezioni su Poliedri e Superfici Discrete

Una direzione moderna nella cartografia matematica è lo studio di proiezioni su poliedri regolari o semirregolari anziché sul piano. Questi includono il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro.

La proiezione di Dymaxion:

La proiezione di Dymaxion, sviluppata da Buckminster Fuller, proietta la sfera su un icosaedro (poliedro con 20 facce triangolari). L'icosaedro viene poi "srotolato" in una forma planare.

Vantaggi:

- Distribuzione più uniforme delle distorsioni
- Nessuna regione è eccessivamente ingrandita o rimpicciolita
- Le masse terrestri sono per lo più su facce non interrotte

Costruzione matematica:

Ogni faccia triangolare dell'icosaedro è tangente alla sfera in un punto (tipicamente il centroide del triangolo). La proiezione dalla sfera alla faccia può essere:

1. Gnomonica (dal centro della sfera)
2. Equivalente (preservando le aree)
3. Conforme (preservando gli angoli localmente)

La scelta dipende dalle priorità dell'applicazione.

Continuità attraverso i bordi:

Una sfida nelle proiezioni poliedriche è garantire la continuità (o almeno la continuità C^0) delle coordinate attraverso i bordi delle facce. Questo richiede un'attenta coordinazione delle proiezioni sulle facce adiacenti.

Per proiezioni gnomoniche, la discontinuità angolare attraverso i bordi può essere significativa, portando a "pieghe" visibili nella mappa. Proiezioni più sofisticate utilizzano funzioni di transizione smooth nelle regioni di bordo.

Capitolo 12: Teoria Avanzata e Frontiere della Ricerca

12.1 Le Trasformazioni Quasiconformi

Una generalizzazione delle trasformazioni conformi sono le trasformazioni quasiconformi. Queste permettono un controllo sulla distorsione angolare massima pur non preservando perfettamente gli angoli.

Definizione:

Una trasformazione $f: \Omega \to \Omega'$ tra domini nel piano complesso è detta K-quasiconforme (con $K \geq 1$) se esiste una costante K tale che per ogni cerchio infinitesimale nel dominio, l'immagine è un'ellisse con rapporto degli assi al massimo K.

Per $K = 1$, recuperiamo le trasformazioni conformi (l'ellisse degenera in un cerchio).

Caratterizzazione analitica:

Una funzione f è K-quasiconforme se e solo se soddisfa l'equazione di Beltrami:

$\partial f/\partial \bar{\zeta} = \mu(\zeta) \cdot \partial f/\partial \zeta$

dove μ è una funzione misurabile con $|\mu(\zeta)| \leq (K-1)/(K+1)$ quasi ovunque.

La funzione μ è detta coefficiente di Beltrami o dilatazione complessa.

Applicazioni in cartografia:

Le trasformazioni quasiconformi permettono di costruire proiezioni con distorsione angolare controllata. Questo può essere utile quando si desidera un compromesso tra conformità (preservazione perfetta degli angoli) e altre proprietà desiderabili.

Esempio: una proiezione che preserva le aree esattamente mentre limita la distorsione angolare a un massimo di 10° può essere costruita come trasformazione quasiconforme con K opportuno.

12.2 Il Teorema di Riemann-Roch e le Superfici di Riemann

Per superfici di genere superiore (con "manici" topologici), la teoria delle trasformazioni conformi si intreccia con la geometria algebrica attraverso il teorema di Riemann-Roch.

Enunciato (forma classica per curve):

Sia X una curva algebrica compatta (equivalente a una superficie di Riemann compatta di dimensione complessa 1) di genere g, e sia D un divisore su X. Allora:

$l(D) - l(K - D) = \deg(D) - g + 1$

dove:

- $l(D)$ è la dimensione dello spazio di funzioni meromorfe con poli limitati da D
- K è il divisore canonico
- $\deg(D)$ è il grado del divisore

Interpretazione per trasformazioni conformi:

Il teorema di Riemann-Roch fornisce informazioni sulla dimensione degli spazi di funzioni meromorfe su superfici di Riemann. Per superfici di genere $g > 1$, questi risultati implicano che le trasformazioni conformi sono molto più rigide che nel caso della sfera (genere 0).

Specificamente, una superficie di Riemann compatta di genere $g > 1$ ha solo un numero finito (dipendente dalla topologia) di automorfismi conformi, in forte contrasto con la sfera che ammette il gruppo infinito-dimensionale delle trasformazioni di Möbius.

12.3 Le Metriche Iperboliche e il Modello del Disco di Poincaré

Il disco unitario con la metrica iperbolica fornisce un modello di geometria non euclidea che è intimamente connesso con la teoria delle trasformazioni conformi.

Metrica iperbolica sul disco:

La metrica iperbolica (o di Poincaré) sul disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ è data da:

$ds^2 = 4|dz|^2/(1 - |z|^2)^2$

Questa metrica ha curvatura gaussiana costante $K = -1$ (negativa).

Geodetiche iperboliche:

Le geodetiche (percorsi di distanza minima) nella geometria iperbolica del disco di Poincaré sono archi di cerchi ortogonali al bordo del disco unitario, insieme ai diametri (che sono cerchi di raggio infinito ortogonali al bordo).

Isometrie iperboliche:

Le isometrie del disco iperbolico sono precisamente le trasformazioni di Möbius che mappano il disco in sé stesso. Queste hanno la forma:

$f(z) = e^{i\theta} \cdot (z - a)/(1 - \bar{a}z)$

dove $|a| < 1$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

Queste trasformazioni preservano la metrica iperbolica ma non la metrica euclidea. Un cerchio euclideo nel disco può essere trasformato in un altro cerchio euclideo di dimensioni diverse, ma entrambi hanno la stessa "dimensione iperbolica".

Applicazioni alla cartografia:

La geometria iperbolica può essere utilizzata per costruire proiezioni di porzioni della sfera che minimizzano certe misure di distorsione globale. Specificamente, la teoria delle superfici a curvatura costante negativa ha applicazioni nella costruzione di reti di triangolazione ottimali per mappe digitali.

12.4 Le Trasformazioni Conformi Discrete

Una frontiera moderna della ricerca è la teoria delle trasformazioni conformi discrete, che si occupa di generalizzare i concetti di conformità a grafi e reticoli discreti.

Conformità discreta:

Un'idea chiave è definire la conformità per mappe tra grafi o mesh triangolari. Una nozione comune è la seguente: una mappa tra due triangolazioni è conforme discreta se preserva gli angoli ai vertici (la somma degli angoli attorno a ogni vertice).

Alternativamente, usando la teoria dei cerchi impacchettati (circle packing), una mappa è conforme se preserva le tangenze tra cerchi in rappresentazioni di circle packing del grafo.

Teorema di Koebe-Andreev-Thurston:

Questo teorema fondamentale afferma che ogni grafo planare 3-connesso può essere rappresentato come il grafo di tangenza di un insieme di cerchi nel piano. Questa rappresentazione è unica a meno di trasformazioni di Möbius.

Applicazioni computazionali:

Le trasformazioni conformi discrete sono utilizzate in:

1. Computer graphics per parametrizzazioni di mesh 3D
2. Imaging medicale per la registrazione di superfici

3. Cartografia digitale per la generazione di griglie adattive
4. Elaborazione di immagini per la correzione di distorsioni

Algoritmo di circle packing:

Dato un grafo planare, l'algoritmo di circle packing costruisce iterativamente i raggi dei cerchi che rappresentano i vertici:

1. Inizializzazione: assegna raggi arbitrari r_v a ogni vertice v
2. Iterazione: per ogni vertice v, aggiorna il raggio per soddisfare meglio i vincoli di angolo
3. Convergenza: ripeti fino a che i vincoli sono soddisfatti con precisione desiderata

L'algoritmo converge geometricamente sotto ipotesi generali.

Conclusioni e Prospettive Future

Sintesi dei Risultati Principali

In questo trattato abbiamo sviluppato una teoria completa delle trasformazioni conformi complesse applicate alla cartografia. I risultati principali includono:

1. **Fondamenti teorici:** La connessione profonda tra analiticità nel senso complesso e conformità geometrica, espressa attraverso le equazioni di Cauchy-Riemann e il comportamento delle derivate complesse.

2. **Proiezioni classiche:** L'analisi rigorosa delle principali proiezioni cartografiche (stereografica, Mercatore, Lambert conica) utilizzando il linguaggio delle funzioni complesse e della geometria differenziale.

3. **Teoria avanzata:** L'applicazione di strumenti sofisticati come la formula di Schwarz-Christoffel, le funzioni ellittiche di Jacobi, e i teoremi di uniformizzazione e mappatura di Riemann.

4. **Vincoli intrinseci:** La dimostrazione rigorosa, tramite il teorema egregium di Gauss e la formula di Gauss-Bonnet, dell'impossibilità di proiezioni perfette e la quantificazione delle distorsioni inevitabili.

5. **Metodi numerici:** L'introduzione di algoritmi moderni per il calcolo efficiente di trasformazioni conformi in applicazioni pratiche.

Direzioni di Ricerca Future

La teoria delle trasformazioni conformi in cartografia continua a evolversi. Alcune direzioni promettenti includono:

1. Ottimizzazione multi-obiettivo:

Sviluppo di proiezioni che ottimizzano simultaneamente più criteri (distorsione angolare, areale, lineare) utilizzando tecniche di programmazione non lineare e calcolo variazionale avanzato.

2. Machine learning e proiezioni adattive:

Utilizzo di reti neurali per apprendere proiezioni ottimali da dati empirici sull'utilizzo delle mappe. Le reti potrebbero imparare a minimizzare distorsioni percettive anziché solo distorsioni geometriche.

3. Cartografia su varietà generali:

Estensione della teoria a proiezioni da varietà riemanniane arbitrarie (non solo la sfera) a spazi target con strutture geometriche complesse. Questo ha applicazioni in visualizzazione scientifica e analisi di dati ad alta dimensionalità.

4. Teoria quantistica delle trasformazioni conformi:

Esplorazione di connessioni con la teoria dei campi conformi quantistici e le sue applicazioni in fisica teorica. Le simmetrie conformi giocano un ruolo centrale nella teoria delle stringhe e nella gravità quantistica.

5. Proiezioni su spazi non euclidei:

Studio di proiezioni dalla sfera a spazi iperbolici, sferici di dimensione superiore, o varietà lorentziane (con applicazioni in relatività generale e cosmologia).

Riflessioni Filosofiche

Il problema fondamentale della cartografia - rappresentare fedelmente una superficie curva su un piano - incarna una tensione matematica profonda tra geometria locale e globale. Il teorema egregium ci insegna che alcune proprietà geometriche sono invarianti intrinseci, impossibili da eliminare o nascondere attraverso rappresentazioni.

Questa impossibilità non è un fallimento della matematica, ma piuttosto una sua trionfante precisione: ci dice esattamente cosa è possibile e cosa no. Le trasformazioni conformi, preservando gli angoli a scapito delle aree e delle distanze, rappresentano un compromesso ottimale per molte applicazioni, dalla navigazione alla visualizzazione scientifica.

L'eleganza della teoria delle funzioni complesse - dove analiticità implica conformità, dove semplici operazioni algebriche corrispondono a trasformazioni geometriche sofisticate - testimonia l'unità profonda della matematica. Ogni proiezione cartografica è simultaneamente:

- Un oggetto di geometria differenziale (curve, curvature, metriche)
- Un oggetto di analisi complessa (funzioni olomorfe, singolarità)
- Un oggetto di topologia (caratteristica di Eulero, genere)
- Un oggetto di algebra (gruppi di trasformazioni, corpi di funzioni)

Questa convergenza di prospettive multiple sullo stesso fenomeno è caratteristica della matematica matura e profonda.

Note Storiche Finali

La storia delle trasformazioni conformi in cartografia riflette lo sviluppo della matematica stessa. Da Mercatore nel XVI secolo, che utilizzò intuizioni geometriche senza il formalismo moderno, a Gauss nel XIX secolo che gettò le fondamenta della geometria differenziale, a Riemann che introdusse le superfici astratte e il concetto di varietà, fino ai matematici contemporanei che utilizzano computer potenti e algoritmi sofisticati.

Ogni generazione di matematici ha aggiunto strati di astrazione e generalità, ma l'oggetto di studio fondamentale - come rappresentare al meglio il nostro mondo sferico - rimane immutato. Questo dialogo tra teoria astratta e applicazione concreta, tra purezza matematica e utilità pratica, continua a guidare la ricerca in questo campo affascinante.

Bibliografia Essenziale

Testi classici:

- Gauss, C. F. (1827). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*
- Riemann, B. (1851). *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*
- Klein, F. (1893). *Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion*
- Poincaré, H. (1907). *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*

Testi moderni:

- Ahlfors, L. V. (1973). *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*
- Nehari, Z. (1952). *Conformal Mapping*
- Lehto, O. & Virtanen, K. I. (1973). *Quasiconformal Mappings in the Plane*
- Snyder, J. P. (1987). *Map Projections - A Working Manual* (USGS Professional Paper 1395)

Articoli fondamentali:

- Schwarz, H. A. (1869). "Über einige Abbildungsaufgaben"
- Christoffel, E. B. (1867). "Sul problema delle temperature stazionarie"
- Lambert, J. H. (1772). "Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten"